

RENDICONTI  
DELLE SEDUTE  
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI  
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 dicembre 1909.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE  
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Osservazioni della cometa 1909 c ≡ cometa di Halley, fatte al R. Osservatorio Astronomico al Collegio Romano. Nota del Socio E. MILLOSEVICH.*

1909 Novembre 7	10 <sup>h</sup> 55 <sup>m</sup> 47 <sup>s</sup>	R. C. R.
α apparenre cometa	5 40 15.17	(9 <sup>a</sup> .567)
δ "	+ 16°49' 21".4	(0. 653)

Nucleo di 12<sup>m</sup>,3 : debolissima nebulosità; osservazione facile.

1909 Novembre 7	11 <sup>h</sup> 44 <sup>m</sup> 31 <sup>s</sup>	R. C. R.
α apparenre cometa	5 40 10.95	(9 <sup>a</sup> .489)
δ "	+ 16°49' 20".0	(0. 623)

1909 Novembre 8	10 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup> 48 <sup>s</sup>	R. C. R.
α apparenre cometa	5 38 10.45	(9 <sup>a</sup> .600)
δ "	+ 16°48' 37".1	(0. 669)

1909 Novembre 9	9 <sup>h</sup> 28 <sup>m</sup> 4 <sup>s</sup>	R. C. R.
α apparenre cometa	5 36 3.51	(9 <sup>a</sup> .642)
δ "	+ 16°47' 48".3	(0. 704)

1909 Novembre 9	9 <sup>h</sup> 56 <sup>m</sup> 4 <sup>s</sup>	R. C. R.
α apparenre cometa	5 36 1.06	(9 <sup>a</sup> .622)
δ "	+ 16°47' 47".7	(0. 685)

1909 Novembre 10	9 <sup>h</sup> 24 <sup>m</sup> 6 <sup>s</sup>	R. C. R.
α apparenre cometa	5 33 47.42	(9 <sup>a</sup> .640)
δ "	+ 16°46' 52".2	(0. 703)

1909 Novembre 12	9 <sup>h</sup> 34 <sup>m</sup> 16 <sup>s</sup>	R. C. R.	Osservatore Bianchi
α apparente cometa	5 28 57.80	(9 <sup>a</sup> .621)	
δ " "	+ 16°44' 42".3	(0.685)	Zappa
1909 Novembre 19	11 <sup>h</sup> 55 <sup>m</sup> 38 <sup>s</sup>	R. C. R.	
α apparente cometa	5 9 11.84	(9 <sup>a</sup> .194)	Millosevich
δ " "	+ 16°32' 44".2	(0.585)	
1909 Dicembre 4	9 <sup>h</sup> 56 <sup>m</sup> 0 <sup>s</sup>	R. C. R.	Millosevich
α apparente cometa	4 14 6.51	(9 <sup>a</sup> .170)	
δ " "	+ 15°34' 32".6	(0.598)	

Nucleo di 10<sup>m</sup>.5; nebulosità debole, simmetrica e piccola (ampiezza della testa=40").

Se si assume la grandezza avuta dalla fotografia l'11 Settembre a Königsthul di 16<sup>ma</sup>, la grandezza il 3 Dicembre doveva essere di 13<sup>ma</sup>.3 oppure di 12<sup>ma</sup>.5 quando lo splendore si faccia variare secondo  $\frac{1}{r^2 \Delta^2}$  oppure secondo  $\frac{1}{r^4 \Delta^2}$ . L'attuale grandezza, essendo di 10.5, mette in luce il fatto, già noto, che ignoriamo le ragioni fisiche della variazione dello splendore delle comete, e che perciò le semplici nostre ipotesi solamente geometriche male governano il fenomeno.

Si dovrebbe credere che, allontanandosi ora la cometa dalla terra, lo splendore assai lentamente cresca, per la diminuzione di  $r$ , fino ai primi di Febbraio 1910 per poi riprendere rapidamente fino ad arrivare ad un massimo nel Maggio, ma non è mai troppa la prudenza nel far predizioni in simile argomento.

### Zoologia. — *Di alcune questioni d'indole generale, collegantisi con lo studio delle fillosserine.* Nota (22<sup>a</sup>) (<sup>1</sup>) del prof. B. GRASSI.

Le nostre estese ricerche sulle fillosserine ci permettono di lumeggiare alcun poco certi problemi d'indole generale, con una base di fatti molto più solida di quella di cui finora si disponeva.

I. DIMORFISMO PREDETERMINATO. — Nella fillossera della vite noi abbiamo stabilito che *da una medesima madre, sia essa fondatrice, ovvero virginopara attera gallecola (gallicola, cellare) vengono prodotte due sorta di uova, che danno origine le une ad altre gallecole e le altre a radicicole* (<sup>2</sup>). Le due sorta di uova, almeno finora, non sono morfologicamente differenziabili prima che lo sviluppo dell'embrione sia molto avanzato. Le

(<sup>1</sup>) Vedi Nota 21<sup>a</sup> nel Boll. del Ministero d'Agricoltura. Relazioni e studi scientifici.

(<sup>2</sup>) Noi (io e Foà) siamo stati i primi a distinguere le neonate di gallecole coi caratteri di gallecole e destinate a vivere sulle parti verdi della vite, dalle neonate di gallecole coi caratteri di radicicole e destinate a vivere sulle radici. Vedasi Nota (1) del 1º settembre 1907.

gallecole e le radicicole sono ben distinte nello stadio di neonata, o di prima larva che si voglia dire (in questo stadio noi le denominiamo *neogallecole* e *neogallecole radicicole* per distinguerle dalle *neoradicicole* produtentisi sulle radici), ma si possono conoscere anche successivamente. Esistono però, oltre alle neogallecole tipicamente gallecole e radicicole, neogallecole avvicinantisì più al tipo di gallecole e altre avvicinantisì più a quello di radicicola, e non mancano vere forme quasi esattamente intermedie, tali da lasciar dubbi sulla loro classificazione.

Questo fenomeno vuol essere messo in rapporto con quelli di dimorfismo scoperti dal Silvestri negli imenotteri parassiti (*Litomastix truncatellus*), risalta però subito una differenza tra il nostro e questo caso, nel quale si hanno forme alate e forme attere sterili, derivanti da un solo uovo per poliembrionia. Nel nostro caso invece le due forme, cioè le gallecole e le radicicole, sono ambedue femmine partenogeniche come la loro genitrice.

In chi tien presente la questione riguardante la determinazione del sesso, può sorgere l'idea che si possa stabilire un parallelo tra il dimorfismo sessuale e quello in discorso della fillossera della vite. Ma per le ragioni che esporremo più avanti, questo parallelo non sembra giustificato; in ogni caso se e quale luce esso possa recare, non è argomento che si possa svolgere soddisfacientemente.

Un'altra serie di fenomeni, che si possono comparare a quello da noi messo in evidenza, riscontrasi nei casi di polimorfismo sessuale (così le varie forme di femmine del *Papilio merope* ecc.).

Più intimamente collegato col nostro è il dimorfismo riscontrato dal Börner (dicembre 1907) nelle *Chermesinae* (estivali e ibernali): noi crediamo però che su queste forme occorrano altri minuziosi esperimenti.

È utile mettere in rilievo che la proporzione tra il numero delle *neogallecole* e quello delle *neogallecole radicicole*, a cui può dar vita una stessa madre, è molto varia, evidentemente a seconda della stagione, della qualità del vitigno e, molto probabilmente, anche del terreno. L'ambiente perciò esercita sulla genitrice un'influenza evidente, che si traduce in una mutazione della percentuale delle due sorta di neogallecole<sup>(1)</sup>. Non v'ha dubbio però che la genitrice deve essere ereditariamente predisposta a queste mutazioni.

II. DIMORFISMO NON PREDETERMINATO. — È molto importante aggiungere che, dopo le prime generazioni, le *neogallecole radicicole* possono, o no, svilupparsi in alate. Siamo perciò in questo caso davanti a un trimorfismo, o anzi a un tetramorfismo. Precisamente una stessa *virginopara* attere gallecola può dar vita: 1° ad altre *virginopare* attere gallecole;

(<sup>1</sup>) Trova riscontro in questo, il seguente fatto. Nel violacciocco lasciato dissecare prima della maturazione dei semi, questi si modificano in tal modo che producono una molto elevata percentuale di piante a fiori doppi.

2º a virginopare attere radicicole; 3º a virginopare alate sessupare, produdenti uova maschili (*masculipare*); 4º a virginopare alate sessupare producenti uova femminili (*feminipare*). Tenendo presente le *virginopare* attere ninfali si può parlare di una quinta forma e perfino di una sesta nel caso finora unico di *ninfale sessupara*.

Senonchè tutte le forme qui enumerate, tranne la prima, in realtà ne rappresentano una sola, ossia hanno per punto di partenza una stessa prima larva, che può essere anche figlia, invece che di gallecola, di radicicola. Ciò era già stato presunto da noi e da altri<sup>(1)</sup>, noi però quest'anno ne abbiamo fornito le prove assolute nei due seguenti modi:

1) infettando con nuova prese su radici di viti americane, viti americane e viti europee si ottenne sulle prime una gran prevalenza di alate e sulle seconde una gran prevalenza di attere virginopare;

2) allevando contemporaneamente in capsula delle prime larve, si ottenne a gran preferenza attere virginopare, quando su ogni singolo frammento di radice capillare americana si lasciava una sola neonata, mentre si ebbe un numero molto maggiore di alate, quando si allevavano tante neonate, tutte sopra uno stesso frammento. È da escludersi che questa differenza sia soltanto apparente e, cioè, possa spiegarsi colla diversa percentuale di mortalità verificantesi nei due casi; infatti la differenza resta tale e quale anche tenendo conto del numero delle fillossere che non arrivarono a maturità: ciò che, mi si permetta di notarlo, in simili sperimenti, a nostro avviso, erroneamente non si suol fare, dando così campo ad equivoci e, in conseguenza di essi, ad erronee deduzioni.

Le nostre qui accennate esperienze dimostrano che col mutare di alcune speciali condizioni (radice americana piuttosto che europea e presenza di uno solo o di tanti insetti in piccolo spazio), forme che avrebbero potuto diventare attere virginopare, hanno invece dato luogo ad alate sessupare cioè *feminipare* o *masculipare*, e viceversa.

La possibilità di questi cambiamenti spiega la comparsa regolare, da noi scoperta nel ciclo della fillossera della vite, di tutta una serie di forme ninfali virginopare, molto raramente sessupare, che indicano tutti i gradi di passaggio da virginopare attere ad alate. Forme simili, per lo più sessupare, si riscontrano in altre fillosserine. Sono del pari da considerarsi come forme che rientrano nello stesso ordine anche le attere sessupare; così pure la differenziazione in alate virginopare e sessupare si allaccia alla stessa serie di

(1) Ancora nella recentissima edizione della sua *Allgemeine Biologie* 1909, O. Hertwig scrive che se alla *Phylloxera vastatrix* si sottrae il nutrimento, come ha dimostrato sperimentalmente Keller, compaiono le alate sessupare (evidentemente per una svista O. Hertwig scrive invece di alate sessupare, forme alate sessuali). Gli esperimenti di Keller sono in realtà imperfetti e inconcludenti; noi li abbiamo ripetuti tante volte con esito negativo.

fenomeni. Vi si collega infine l'osservazione di Pergande e di Börner della esistenza, come anomalia rara, di forme virginico-sessupare, che sono state anche da noi riscontrate nella *Acanthaphis spinulosa*, con prove che escludono qualsiasi dubbio.

Il fenomeno definitivamente da noi, con sperimenti incontrovertibili acquisito alla scienza (<sup>1</sup>), che una stessa neonata può dar luogo ad una femmina partenogenetica, o ad una sessupara feminipara, o ad una sessupara masculipara, viene ad avere grande importanza dal punto di vista della produzione del sesso. Ognuno desume dai nostri esperimenti che artificialmente si viene a dar vita a maschi piuttosto che a femmine, o viceversa.

Si potrebbe però tentare di dare al fenomeno un altro significato, che escluderebbe il presupposto cambiamento di sesso.

Infatti, sottilizzando, si potrebbe supporre che arrivassero a trasformarsi in attere virginopare, ovvero in alate sessupare, e avessero così aperta una doppia via di sviluppo, soltanto le forme destinate a produrre femmine, mentre quelle destinate a produrre maschi dovrebbero sempre di necessità diventare alate. Se questa interpretazione si potesse accettare, ognuno comprende che nessun cambiamento di sesso sarebbe accaduto nei nostri esperimenti; se non che i fatti la contradicono. Invero, invece di trovare come si sarebbe aspettato se l'interpretazione fosse stata giusta, le alate allevate isolatamente sessupare masculipare, le abbiamo trovate tanto masculipare quanto feminipare, precisamente come quelle allevate insieme. Questo accertamento porta dunque a concludere che nei nostri esperimenti non solo si produce un cambiamento nella madre facendola diventare piuttosto attera che alata, o viceversa, ma si produce anche una mutazione di sesso della loro prole.

Anche altre ragioni si aggiungono a dimostrare che cause esterne possono influire sulle alate per la produzione dell'uno piuttosto che dell'altro sesso.

In varie specie di fillossere (*Ph. vastatrix*, *Acant. spinulosa* ecc.) è stato accertato che in alcuni periodi molto predominano i sessuali di sesso femminile (cioè non partenogeni), fino a mancare del tutto i maschi, in altri predominano molto quelli di sesso maschile, e in altri infine si possono avere i due sessi in poco differente proporzione; questi periodi non si seguono ordinatamente, e possono ripetersi con una certa alternativa. Tutto fa supporre che le cause che li determinano debbano cercarsi nell'ambiente (condizioni delle piante, di temperatura, di umidità ecc.).

Abbiamo sempre parlato di produzione di un sesso piuttosto che dell'altro, senza mai accennare agli elementi germinativi: con altre parole, non

(<sup>1</sup>) Le esperienze sopra altri *Aphidida* di Macchiati, Göldi, Mordwilko ecc., non sono del tutto provativi, soprattutto perché resta sempre il dubbio che solo le forme destinate a diventare alate siano sopravvissute, che l'influenza sia stata esercitata sulla madre ecc.

ci siamo ancora posta la domanda se dai nostri esperimenti resti anche dimostrato che un medesimo uovo possa dar vita ad una virginopara, ad una feminipara o ad una masculipara. Così messa la domanda, la risposta riesce molto difficile. È un fatto che nella prima larva, la quale, come abbiamo dimostrato, può subire varî destini, già si veggono le cellule germinali; è del pari certo che la virginopara produce un numero molto maggiore di uova della sessupara. Inoltre le sessupare che nella vite sono esclusivamente masculipare e feminipare, in altre forme (*Acanthochermes*, *Foaiella*) sono ad un tempo masculipare e feminipare. È ragionevole perciò il dubbio che nel caso delle virginopare vengano soppressi gli elementi che darebbero luogo a sessuali e nel caso delle feminipare, oltre a questi, anche quelli maschili, e viceversa. Questo è un problema che deve essere risoluto citologicamente, ciò che appunto stiamo facendo. In ogni modo, tornando alla differenziazione in virginopare e sessupare, noi siamo davanti ad un dimorfismo non predestinato; evitiamo di dire acquisito dall'individuo, perchè anche in questo caso sarebbe assurdo ammettere che le condizioni, che regolano la destinazione, risiedessero tutte nell'ambiente; per contrario una parte di esse, anzi la più importante, deve cercarsi nell'essere stesso, che per eredità è bipotente e, a seconda dell'ambiente, sviluppa l'una o l'altra potenza: si ripete precisamente quel che accade negli insetti sociali e che io ho dimostrato per primo nei Termiti.

È necessario tener presente che la bipotenza si manifesta soltanto di estate e nella prima metà dell'autunno. Nè a primavera, nè a molto tardo autunno, siamo riusciti ad avere alate o ninfali, ma abbiamo ottenuto soltanto attere virginopare. Dal non ottenerne all'ottenerne molte non si passa di un tratto, ma per gradi, vale a dire che man mano che l'estate si inoltra, se ne hanno di più e di meno invece, man mano che l'autunno si avanza<sup>(1)</sup>. Aggiungasi che le forme ninfali sessualmente mature si producono a gran preferenza di autunno. Da queste limitazioni del dimorfismo non predestinato delle forme in discorso deducesi che, se ci fossimo ristretti ad esperimentare in epoca inopportuna, saremmo arrivati a conclusioni opposte, e ciò deve suggerire la massima prudenza, quando affrontiamo la questione del sesso in altri gruppi di animali.

III. SIGNIFICATO DELLE VARIAZIONI DELLA LUNGHEZZA DEL ROSTRO. — Dalle nostre ricerche è risultato che le fillossere escono dall'uovo con un rostro di lunghezza differente a seconda che sono destinate a vivere sulle parti verdi della vite, ovvero sulle radici. Le lunghezze vanno però soggette a molte variazioni. La lunghezza minima del rostro delle neonate gallecole (neogallecole gallecole) non viene mai riscontrata nelle neonate radicicole (neogallecole radicicole e neoradicicole), viceversa la lunghezza massima del rostro

(1) Non può essere questione soltanto di temperatura, come dimostrano gli esperimenti fatti in capsule al caldo.

di queste non viene mai raggiunta da quelle. Però la lunghezza massima del rostro delle neogallecole può raggiungere e in qualche caso perfino sorpassare quella minima delle neogallecole radicicole e delle neoradicicole. Le variazioni della lunghezza del rostro delle neogallecole gallecole (comprese le neonate dall'uovo d'inverno) non corrispondono ad epoche determinate. Forse esse vanno soggette a leggi, che si potranno precisare, tenendo conto speciale del vitigno e di tutte le altre condizioni delle foglie ecc. La lunghezza del rostro della neonata radicicola va invece crescendo per gradi a cominciare dalla primavera fino a raggiungere un massimo in autunno (<sup>1</sup>). Notasi che una stessa madre gallecola o radicicola, può dar la vita a neonate col rostro oscillante di lunghezza, precisamente oscillante quasi dal minimo al massimo possibile nel caso delle gallecole, ma soltanto entro brevi limiti nel caso delle radicicole. Si hanno perciò moltissime variazioni, un caos, nel quale a tutta prima sembra non sia possibile proiettare alcun fascio di luce. Noi crediamo invece che si possa illuminarlo, tenendo calcolo delle differenti condizioni della vite. La lunghezza del rostro è adatta — fino a che punto resta da determinarsi — all'uso, cioè corrispondente alla profondità a cui deve penetrare perchè la fillossera possa convenientemente vivere. I bei capillari primaverili evidentemente richieggono un rostro più corto delle radici grosse. A noi sembrava che con questo fatto non fosse conforme la circostanza che le ibernanti hanno il rostro relativamente lungo; ma quest'apparente contraddizione viene eliminata dall'osservazione che le ibernanti si sviluppano sulle radici più o meno grosse, press'a poco nei punti dove ibernano (Foà). Il fatto dell'allungarsi del rostro col succedersi delle generazioni e in rapporto alle differenti condizioni della pianta, su cui l'animale si nutre, non si verifica soltanto per la fillossera della vite, ma anche per altre specie affini.

Esaminando le neonate di *Ph. quercus* sul leccio dopo la metà di settembre siamo restati sorpresi dal fatto che certe hanno il rostro corto e in complesso peli corti, altre il rostro lungo e peli relativamente lunghi. Vi è una grande oscillazione della lunghezza del rostro, tanto nelle prime quanto nelle seconde forme, ma anche in questo caso il minimo delle prime non viene mai raggiunto dalle seconde, e viceversa il massimo delle seconde non viene mai raggiunto dalle prime.

Per spiegarci questo fenomeno siamo ricorsi a svariate supposizioni, non esclusa la possibilità dello sviluppo anticipato dell'uovo durevole. Questo ultimo dubbio fu facilmente escluso, avendo trovato le madri virginopare attere delle due forme e avendo anzi determinato che una madre dà vita esclusivamente a una delle due forme, cioè o a individui col rostro lungo, o a individui col rostro corto. Restava la supposizione che le prime larve col-

(<sup>1</sup>) Questo si può considerare come un primo passo verso la suaccennata distinzione di estivali e di ibernali. Quanto all'eccezione presentata dalle estivanti, veggansi le note precedenti.

rostro lungo ibernassero senza ulteriormente svilupparsi. Anche questo dubbio fu escluso con opportuni esperimenti.

Ci siamo allora rivolti allo studio del rostro delle madri. Abbiamo così precisato che le forme con rostro lungo sono derivate da madri con tubercoli oscuri (<sup>1</sup>) e che quelle col rostro corto son venute fuori da madri con tubercoli chiari. Quanto alla lunghezza del rostro della madre si può dire che quelle coi tubercoli chiari, se prese sulle foglie, hanno il rostro più corto di quelle prese sui rametti.

Tutto sommato, noi riteniamo che le variazioni di lunghezza del rostro, che si riscontrano estesissime anche in altre forme, non siano insignificanti dal punto di vista della funzione e che si tratti di un carattere che trova la sua spiegazione fisiologica, nelle condizioni della pianta. Senonchè queste condizioni non sono così semplici come si potrebbe supporre a tutta prima, anche perchè non si tratta soltanto di prendere alimento una volta, ma di continuare ad alimentarsi per molte giornate restando nello stesso posto, o di pochissimo spostandosi ad ogni muta.

Non si può supporre un'influenza dell'ambiente sulle uova già deposte, essendosi sviluppate dai singoli gruppi di uova tenute a una data temperatura forme col rostro di lunghezze svariate; non ci resta perciò che di ammettere un'ammirabile influenza dell'ambiente sulla madre, la quale viene perciò a produrre figli col rostro più o meno lungo a seconda dei bisogni di questi. Si comprende che anche in questi casi, la variabilità non si può ammettere prodotta direttamente dall'ambiente, senza una spiccata predisposizione ereditaria della madre, come non si può ammettere che sia il calore che trasformi l'uovo in pulcino.

Noi tenevamo presenti un tempo altri fatti, che potevano supporsi riportabili ad influenza dell'ambiente sulla madre, per es., il non svilupparsi alate

(<sup>1</sup>) La Bonfigli ha fatto in proposito le seguenti osservazioni:

Le neonate estivo-autunnali fornite di rostro lungo hanno i peli tipici del capo più sottili in generale di quelli delle fondatrici; essi si mantengono uniformi per un gran tratto della lunghezza; verso la fine si dilatano e terminano poi come troncati od anche dentellati. L'ottavo tergite ha due peli acuminati, abbastanza lunghi; la parte del terzo articolo dell'antenna al di sotto del rinario presenta due lunghi peli; il rostro è generalmente più lungo che non nelle neonate delle fondatrici ed il labbro inferiore ha al secondo articolo tracce di divisioni fino in cinque scleriti.

Le virginopare attere adulte (madri delle neonate suddette) hanno i tubercoli bruni subcilindrici, o in forma di tronco di cono, più o meno lunghi; al sesto tergite i tubercoli sono piccolissimi e possono essere in parte (marginali) sostituiti da peli. L'ornamentazione squamiforme del dorso è poco accentuata. Le zampe, il rostro e le antenne sono molto bruni. Le tibie sono molto corte (85-105  $\mu$ ); il rostro invece può essere abbastanza lungo (anche 370  $\mu$ ); le antenne presentano ancora i due peli suddetti, più brevi però che non nella neonata, del resto non sono differenti da quelle delle solite virginopare attere delle *Ph. quercus*.

Per tutti questi caratteri può sorgere il dubbio che si tratti di una specie a sé, finora confusa colla *Ph. quercus*.

sulle viti europee in moltissimi punti di Fauglia da noi esplorati (anzi in nessuno, eccetto uno solo). Le sopra accennate esperienze però ci hanno obbligato ad ammettere che ciò si possa attribuire, invece che ad un'influenza sulla madre, ad un'azione diretta sulla prole.

#### IV. VARIAZIONI RAPPORTABILI FORSE ALLA RIPRODUZIONE SESSUALE. —

Da quanto abbiamo fin qui riferito, risulta che potenzialmente le fillossere possono presentare moltissime variazioni, subordinate a condizioni più o meno ben precise. Questi fenomeni si debbono tener ben distinti da altri, che sembrano riferibili alla riproduzione sessuale. È singolare il fatto che se noi esaminiamo le fillossere sulle radici delle viti europee, in quelle località dove la produzione delle alate è eccezionale, ossia fillossere attere virginopare (coi relativi stadi di sviluppo), le quali rappresentano quasi sempre generazioni molto lontane da quella sessuale, noi restiamo meravigliati di non riscontrare mai variazioni. I peli delle fillossere sono stati dal Cornu minuziosamente descritti uno per uno; avevamo perciò dei punti di riscontro su cui ci potevamo fondare. Essendo venute fuori alcune differenze tra i nostri dati e quelli dell'autore francese ci siamo procurati esemplari raccolti in varie epoche in Francia e in Italia: abbiamo così accertato che corrispondevano ai nostri e perciò le piccole divergenze dovevano ascriversi a lieve mende del Cornu, del resto esattissimo. Possiamo pertanto stabilire che le generazioni lontane da quelle sessuali nella fillossera della vite non presentano variazioni, che riscontriamo invece frequenti nelle virginopare gallecole, le quali, come si sa, rappresentano generazioni vicine a quelle sessuali. Dobbiamo però intendere le generazioni lontane da quella sessuale *cum grano salis*, limitarci, cioè, a considerare come veramente tali quelle che sono simili tra loro, e non dimenticare il concetto di potenzialità più sopra chiarito, il quale ci induce a considerare, per es., come lontana soltanto formalmente dalla generazione sessuale, la prima generazione sessuale, che sussegue a centinaia di generazioni partenogenetiche. Ciò sosteniamo perchè mentre non abbiamo trovato alcuna variazione nelle attere virginopare, ne abbiamo riscontrate invece in prenife, in ninfe, alate e sessuali. Le variazioni si riscontrano non di raro in varie forme delle fillossere che hanno un ciclo annuale di sviluppo, le cui generazioni perciò non sono mai lontane da quella sessuale. In conclusione sembra che la produzione delle variazioni abbia veramente quell'intimo nesso con la riproduzione sessuale, che fu già oggetto di tante discussioni.

\* \* \*

Questa Nota era già scritta quando uscì l'interessantissimo lavoro di Morgan dal titolo « *A biological and cytological study of sex determination in Phylloxerans and Aphids* » (Journal of Experimental Zoology, September, 1909). Nè il Morgan, nè la Stevens sono riusciti mutando le condizioni esterne a produrre la trasformazione di forme partenogenetiche in forme sessuali. « La precedente discussione, « continua Morgan », non implica che le

condizioni esterne non siano potenti fattori nei cicli della vita delle specie, che alternano riproduzioni sessuali e partenogenetiche. Al contrario sono preparato ad ammettere un tale concetto ad onta dei risultati negativi degli sperimenti ». Noi siamo lieti di aver potuto fornire quella dimostrazione che non era riuscita ai naturalisti americani.

La parte citologica del lavoro di Morgan viene esposta così sommariamente che è impossibile trovarvi argomenti sufficienti per togliere di mezzo il nostro sospetto che nella forma partenogenetica si sviluppino certe uova, nella sessupara maschile certe altre, e nella feminipara altre ancora, restando atrofiche le altre sorta di uova. Possiamo solo dire che da quanto ha veduto il Morgan, sembra risultare che non accada niente di simile e che perciò veramente uno stesso uovo possa dar luogo a femmina partenogenetica, a femmina sessuale o a maschio. Singolare viene ad essere il caso della *Acanthochermes*, la cui madre derivante dall'uovo fecondato, dà uova di maschio e di femmina. Se ciò si potrà accordare coi risultati di Morgan riguardanti il numero dei cromosomi, resta da vedere. Aggiungerò infine che nella parte biologica del lavoro del Morgan vi sono delle parti incomplete, così quelle forme che egli appella *rudimentary females* debbono essere delle neonate e le forme di *Ph. subelliptica*, di *caryaeglobuli*, di *depressa* supposte dal Morgan sessuali, non lo sono certamente. Anche in una parte delle figure, i sessuali sono stati dotati di peli in troppa abbondanza. Ad onta di queste lievissime mende, le conclusioni citologiche, a cui giunge l'autore, sono di somma importanza.

Gli interessantissimi esperimenti del Kammerer sulle Salamandre e sugli *Alytes* ci persuadono ad aggiungere un'ultima considerazione. Se non ci inganniamo, i nostri studi sulla *Phylloxera* non soltanto meritano considerazione da parte di coloro che si occupano dell'origine del sesso, ma hanno anche un piccolo significato per la questione dell'ereditarietà delle proprietà acquisite, che oggigiorno si tenta risolvere cambiando le condizioni di temperatura, di umidità e di pressione dell'ambiente. Vedi Standfuss, Tower, Kammerer ecc. A noi sembra che i fenomeni da loro messi in luce possano rappresentare, invece di nuove proprietà acquisite, atavismi, cioè, fenomeni già verificatisi, quando le specie vivevano in ambiente differente dall'ambiente attuale e avvicinantesi più o meno a quello loro preparato artificialmente dagli sperimentatori: basta richiamare le più elementari cognizioni geologiche per persuadersi che i suddetti Autori hanno messo i loro animali di esperimento in condizioni, nelle quali il geologo è autorizzato a supporre che questi siansi già trovati in altra epoca. Si tratterebbe perciò di una potenzialità latente, facente parte del patrimonio ereditario della specie, che si farebbe artificiosamente esplicare e che una volta esplicata continuerebbe ad apparire, almeno per un certo numero di generazioni. Tanta potenzialità sembra più facilmente ammissibile dopo i fatti da noi determinati nel ciclo di sviluppo delle fillossere.

Meccanica. — *Azione esercitata da una massa liquida in moto sopra un corpo fisso.* Nota I del Corrispondente E. ALMANSI.

Matematica. — *Funzioni rappresentabili con la formula integrale di Fourier.* Nota di GIUDITTA GRAZIANI, presentata dal Corrispondente A. DI LEGGE.

Meccanica. — *Sur le problème des vibrations transversales des verges élastiques.* Nota di N. KRYLOFF (ingénieur des mines), presentata dal Socio U. DINI.

Fisica matematica. — *Sopra un problema di dinamica degli elettroni.* Nota del dott. L. SILLA, presentata dal Socio VOLTERRA.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Su l'integrazione di alcune equazioni alle derivate parziali mediante funzioni di Bessel.* Nota di FILIPPO SIBIRANI, presentata dal Corrisp. C. ARZELÀ.

1. Ricordato che l'equazione  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + z = 0$  ammette per integrale particolare, assumente il valore 1 sopra gli assi, una funzione di Bessel di prima specie e di ordine 0, stabilisco una formula che dà l'integrale generale dell'equazione  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + A(x) B(y) z = C(x, y)$ , conosciuto che sia un conveniente integrale particolare dell'equazione priva di secondo membro, che è ancora una funzione di Bessel.

Pure per mezzo delle funzioni di Bessel trovo l'integrale dell'equazione alle derivate parziali lineare a coefficienti costanti  $\sum_{k=0}^n a_k \frac{\partial^{2k} z}{\partial x^k \partial y^k} = 0$  che si riduce, esso e le derivate  $\frac{\partial^{2m} z}{\partial x^m \partial y^m}$  ad assegnate costanti sulle rette  $x = \alpha$ ,  $y = \beta$ : stabilisco poi una formula che fornisce l'integrale generale dell'equazione  $\sum_{k=0}^n a_k \frac{\partial^{2k} z}{\partial x^k \partial y^k} = K(x, y)$  soddisfacente alle solite condizioni di Cauchy,

quando si sia trovato un integrale particolare dell'equazione precedente, che prenda convenienti valori sulle rette  $x = \alpha$ ,  $y = \beta$ , insieme colle derivate della forma  $\frac{\partial^m z}{\partial x^m \partial y^m}$ .

## 2. L'equazione

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + z = 0$$

ammette come integrale particolare, che sugli assi prende il valore 1, la funzione di Bessel di prima specie e di ordine zero  $J^{(0)}(2\sqrt{xy})$ , essendo

$$J^{(0)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2^{2n}(n!)^2};$$

eppero  $J^{(0)}(2\sqrt{(x-\alpha)(y-\beta)})$  è l'integrale della (1) che assume il valore 1 sulle rette  $x = \alpha$ ,  $y = \beta$ .

Si abbia l'equazione

$$(2) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + A(x) B(y) z = C(x, y)$$

in cui si suppongono  $A$ ,  $B$ ,  $C$  funzioni continue, e si voglia la soluzione che per  $x = x_0$  si riduce a  $\varphi(y)$  e per  $y = y_0$  a  $\psi(x)$ , supposto  $\varphi(y_0) = \psi(x_0) = z_0$ . Col porre

$$(3) \quad \begin{aligned} z &= u + \varphi(y) + \psi(x) - z_0; \\ C(x, y) - A(x) B(y) [\varphi(y) + \psi(x) - z_0] &= G(x, y) \end{aligned}$$

l'equazione diviene

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A(x) B(y) u = G(x, y)$$

della quale basta trovare la soluzione che si annulla per  $x = x_0$  e per  $y = y_0$ .

Se fosse  $G(x, y) = 0$ , l'unica soluzione della

$$(4') \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A(x) B(y) u = 0$$

che si annulla per  $x = x_0$  e per  $y = y_0$  è  $u = 0$ , onde supporremo  $G(x, y) \neq 0$ .

Ma della (4') ci interessa, pel seguito, trovare la soluzione che prende il valore 1 per  $x = \alpha$  e per  $y = \beta$ . Se si osserva che

$$\frac{\partial^2 J^{(0)}(2\sqrt{w_1(x) \cdot w_2(y)})}{\partial x \partial y} = -J^{(0)}(2\sqrt{w_1(x) \cdot w_2(y)}) w'_1(x) \cdot w'_2(y)$$

è chiaro che la cercata funzione è

$$J^{(0)} \left( 2 \left[ \int_{\alpha}^{\infty} A(x) dx \cdot \int_{\beta}^y B(y) dy \right]^{\frac{1}{2}} \right).$$

Orbene la soluzione della (4) annullantesi per  $x = x_0$  e per  $y = y_0$  è data da

$$(5) \quad \bar{u}(x, y) = \int_{x_0}^{\infty} d\alpha \int_{y_0}^y G(\alpha, \beta) J^{(0)} \left( 2 \left[ \int_{\alpha}^{\infty} A(x) dx \cdot \int_{\beta}^y B(y) dy \right]^{\frac{1}{2}} \right) d\beta$$

come ora proveremo.

A quest'uopo si osservi che se si ha la funzione

$$v(x, y) = \int_{x_0}^{\infty} d\alpha \int_{y_0}^y G(\alpha, \beta) \theta(x, y, \alpha, \beta) d\beta,$$

ove  $\theta(x, y, \alpha, \beta)$  è funzione continua rispetto ai quattro argomenti che contiene, si ha applicando la derivazione sotto il segno

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= \int_{x_0}^{\infty} d\alpha \int_{y_0}^y G(\alpha, \beta) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + \int_{x_0}^{\infty} G(\alpha, y) \frac{\partial \theta(x, y, \alpha, y)}{\partial x} d\alpha + \\ &+ \int_{y_0}^y G(x, \beta) \frac{\partial \theta(x, y, x, \beta)}{\partial y} d\beta + G(x, y) \theta(x, y, x, y) \end{aligned}$$

formula che si riduce a

$$(6') \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \int_{x_0}^{\infty} d\alpha \int_{y_0}^y G(\alpha, \beta) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + G(x, y)$$

se si ammette che  $\theta$  prenda il valore 1 quando  $x = \alpha$  per qualsivoglia  $y$ , e quando  $y = \beta$  per qualsivoglia  $x$ .

La funzione  $J^{(0)} \left( 2 \left[ \int_{\alpha}^{\infty} A(x) dx \cdot \int_{\beta}^y B(y) dy \right]^{\frac{1}{2}} \right)$  si comporta come la  $\theta$ , sia per la continuità, che per i valori che essa assume per  $x = \alpha$  e per  $y = \beta$ ; di più soddisfa alla (4') onde

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + A(x) B(y) \bar{u} = G(x, y)$$

come si doveva provare; d'altra parte poi  $\bar{u}$  si annulla per  $x = x_0$  e per  $y = y_0$ .

3. Si abbia l'equazione

$$(7) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + A(y) \frac{\partial z}{\partial x} + B(x) \frac{\partial z}{\partial y} + C(x, y) z + D(x, y) = 0$$

ove si suppone

$$(8) \quad C(x, y) = A(y) B(x) + H(x) K(y).$$

Se si pone

$$z = e^{-\int^{\text{A}dy - \int^{\text{B}dx}} \zeta(x, y)},$$

si sostituisce in (7) e si moltiplica per  $e^{\int^{\text{A}dy + \int^{\text{B}dx}}}$ , la (7) stessa diviene, tenendo conto della (8),

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + H(x) K(y) z + e^{\int^{\text{A}dy + \int^{\text{B}dx}} D(x, y)} = 0$$

che è del tipo (4).

Sia data l'equazione

$$(9) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{n}{z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + A(x) B(y) z + C(x, y) z^n = 0$$

con  $n$  numero qualsivoglia. Ponendo

$$\frac{z^{1-n}}{1-n} = \zeta$$

e sostituendo nella (9) nella quale si è diviso per  $z^n$ , si ha

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + A(x) B(y) (1-n) \zeta + C(x, y) = 0$$

che è della forma (4).

4. Sia data l'equazione, a coefficienti costanti

$$(10) \quad \frac{\partial^{2n} z}{\partial x^n \partial y^n} + a_1 \frac{\partial^{2(n-1)} z}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}} + a_2 \frac{\partial^{2(n-2)} z}{\partial x^{n-2} \partial y^{n-2}} + \cdots + a_n z = H(x, y)$$

di cui si voglia la soluzione che soddisfa alle condizioni

$$(11) \quad \left( \frac{\partial^{n-k} z}{\partial x^{n-k}} \right)_{x=x_0} = \varphi_k(y) \quad \left( \frac{\partial^{n-k} z}{\partial y^{n-k}} \right)_{y=y_0} = \psi_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

supposto

$$\varphi_k^{(n-h)}(y_0) = \psi_h^{(n+k)}(x_0) \quad \begin{cases} h = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases}.$$

Colla sostituzione

$$\begin{aligned} z = u + \sum_{s=0}^{n-1} & \left[ \varphi_{s+1}(y) - \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{s+1}^{(i)}(y_0) \frac{(y-y_0)^i}{i!} \right] \frac{(x-x_0)^{n-1-s}}{n-1-s!} + \\ & + \sum_{i=0}^{n-1} \psi_{n-i}(x) \frac{(y-y_0)^i}{i!} \end{aligned}$$

la (10) diviene

$$(12) \quad \frac{\partial^{2n}u}{\partial x^n \partial y^n} + a_1 \frac{\partial^{2(n-1)}u}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}} + a_2 \frac{\partial^{2(n-2)}u}{\partial x^{n-2} \partial y^{n-2}} + \cdots + a_n u = K(x, y)$$

e la  $u$  deve soddisfare alle condizioni

$$(13) \quad \left( \frac{\partial^r u}{\partial x^r} \right)_{x=x_0} = 0 \quad ; \quad \left( \frac{\partial^r u}{\partial y^r} \right)_{y=y_0} = 0 \quad (r = 0, 1, \dots, n-1).$$

Risolviamo prima il problema di determinare la soluzione dell'equazione

$$(14) \quad \frac{\partial^{2n}u}{\partial x^n \partial y^n} + a_1 \frac{\partial^{2(n-1)}u}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}} + a_2 \frac{\partial^{2(n-2)}u}{\partial x^{n-2} \partial y^{n-2}} + \cdots + a_n u = 0$$

soddisfacente alle condizioni

$$(15) \quad \frac{\partial^{2m}u}{\partial x^m \partial y^m} = M_m \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

per  $x = \alpha$  e per  $y = \beta$ , i  $M_m$  essendo numeri prefissati <sup>(1)</sup>.

È facile verificare che  $J^{(0)}(2\sqrt{\theta(x-\alpha)(y-\beta)})$  soddisfa all'equazione (14) se  $\theta$  soddisfa all'equazione

$$(16) \quad (-1)^n \theta^n + (-1)^{n-1} a_1 \theta^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \theta + a_n = 0.$$

Supposte le radici  $\theta_r$  tutte diverse, la funzione  $\sum_{r=1}^n A_r u_r$  ove si pone

$$u_r = J^{(0)}(2\sqrt{\theta_r(x-\alpha)(y-\beta)})$$

soddisfa alla (14) e poichè

$$\left( \frac{\partial^{2s} u_r}{\partial x^s \partial y^s} \right)_{x=\alpha} = \left( \frac{\partial^{2s} u_r}{\partial x^s \partial y^s} \right)_{y=\beta} = (-1)^s \theta_r^s$$

soddisferà anche alle condizioni (15) se i numeri  $A_r$  sono scelti in modo da soddisfare al sistema normale

$$(17) \quad A_1 \theta_1^s + A_2 \theta_2^s + \cdots + A_n \theta_n^s = (-1)^s M_s \quad (s = 0, 1, \dots, n-1).$$

Se l'equazione (16) ha radici multiple, il sistema (17) non è normale ed allora bisogna procedere in altro modo.

Sia  $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_p$  e  $\theta_r \neq \theta_p$  per  $r > p$ . Intanto si ha identicamente

$$(18) \quad \frac{\partial^{2n}u}{\partial x^n \partial y^n} + a_1 \frac{\partial^{2(n-1)}u}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}} + a_2 \frac{\partial^{2(n-2)}u}{\partial x^{n-2} \partial y^{n-2}} + \cdots + a_n u = F(\theta) u$$

<sup>(1)</sup> È ovvio osservare che non sono le solite condizioni di Cauchy.

avendo posto  $u = J^{(0)}(2\sqrt{\theta(x-\alpha)(y-\beta)})$  e indicando con  $F(\theta)$  il primo membro della (16).

Se deriviamo la (18) rispetto a  $\theta$  una volta, poi una seconda volta e così di seguito fino a  $p-1$  volte si ottengono  $p-1$  equazioni che sono soddisfatte se  $\theta$  è la radice d'ordine di molteplicità  $p$  della (16), giacchè i secondi membri contengono linearmente la  $F$  e le derivate successive che saranno nulle per la nota proprietà delle radici multiple. Ciò fa vedere che saranno soluzioni della (14) le  $p$  funzioni

$$(19) \quad \begin{aligned} u_1 &= J^{(0)}(2\sqrt{\theta(x-\alpha)(y-\beta)}), \quad u_2 = \frac{du_1}{d\theta}, \\ u_3 &= \frac{d^2u_1}{d\theta^2}, \dots, \quad u_p = \frac{d^{p-1}u_1}{d\theta^{p-1}} \end{aligned}$$

insieme con le  $u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_n$  del caso precedente. Allora se si prendono i numeri  $A$  soddisfacenti al sistema normale <sup>(1)</sup>

$$\begin{aligned} A_1 D_{s,0} \theta_1^s + A_2 D_{s,1} \theta_1^{s-1} + A_3 D_{s,2} \theta_1^{s-2} + \dots + A_p D_{s,p-1} \theta_1^{s-p+1} + \\ + A_{p+1} \theta_{p+1}^s + A_{p+2} \theta_{p+2}^s + \dots + A_n \theta_n^s = (-1)^s M_s \\ (s = 0, 1, \dots, n-1), \end{aligned}$$

dove  $\theta_1$  innalzato ad esponente negativo dev'essere rimpiazzato dallo zero e dove si indica con  $D_{s,r}$  il prodotto di  $r$  fattori decrescenti a cominciare da  $s$ , la  $\sum_{r=1}^n A_r u_r$  è la soluzione della (14) che soddisfa alle condizioni (15).

Osserviamo che nelle (19) le funzioni  $u_2, u_3, \dots, u_p$  possono esprimersi per le funzioni di Bessel di ordine superiore allo zero dell'argomento  $2\sqrt{\theta_1(x-\alpha)(y-\beta)}$ , mediante le formule note della teoria delle funzioni cilindriche:

$$\frac{dJ^{(0)}(z)}{dz} = -J^{(1)}(z) \quad ; \quad \frac{dJ^{(n)}(z)}{dz} = \frac{1}{2} [J^{(n-1)}(z) - J^{(n+1)}(z)] \quad \text{per } n > 0.$$

Si sia ora determinata la soluzione  $U((x-\alpha)(y-\beta))$  di (14) soddisfacente alle condizioni

$$(20) \quad \frac{\partial^{2m} U}{\partial x^m \partial y^m} = 0 \quad (m = 0, 1, \dots, n-2); \quad \frac{\partial^{2(n-1)} U}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}} = 1$$

per  $x = \alpha$  e per  $y = \beta$ . Allora la funzione

$$(21) \quad u = \int_{x_0}^x d\alpha \int_{y_0}^y K(\alpha, \beta) U((x-\alpha)(y-\beta)) d\beta$$

soddisfa all'equazione (2) e alle condizioni ai limiti (13).

<sup>(1)</sup> La normalità del sistema risulta dallo sviluppo del determinante dei coefficienti che io ho dato nella Nota *Un determinante affine a quello di Wandering*: Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dicembre 1905.

Per veder ciò, basta osservare che per le formule (6) e (20) si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{2(n-k)} u}{\partial x^{n-k} \partial y^{n-k}} &= \int_{x_0}^x d\alpha \int_{y_0}^y K(\alpha, \beta) \frac{\partial^{2(n-k)} U}{\partial x^{n-k} \partial y^{n-k}} d\beta \quad (k = 1, 2, \dots, n) \\ \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^n \partial y^n} &= \int_{x_0}^x d\alpha \int_{y_0}^y K(\alpha, \beta) \frac{\partial^{2n} U}{\partial x^n \partial y^n} d\beta + K(x, y)\end{aligned}$$

e sostituire nella (12).

5. È facile vedere che il sistema

$$(22) \quad \frac{\partial^2 z_r}{\partial x \partial y} + a_{r1}z + a_{r2}z_2 + \dots + a_{rn}z_n = \chi_r(x, y) \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

si può ricondurre a successive integrazioni di equazioni del tipo (12).

Anche sistemi di ordine più elevato possono, con opportune sostituzioni, trasformarsi in sistemi del secondo ordine di un maggior numero di equazioni del tipo (22); epperò essi pure saranno integrabili per mezzo delle funzioni di Bessel.

6. Diamo alcune relazioni funzionali a cui soddisfa la funzione  $J^{(0)}(uv)$  deducendole da risultati ottenuti nei paragrafi precedenti.

Se è data l'equazione

$$(23) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + xyz + \operatorname{sen}(x \cdot y) = 0$$

l'integrale che assume sugli assi il valore 1 è, giusta la formula (5),

$$z = 1 - \int_0^x d\alpha \int_0^y [\alpha \beta + \operatorname{sen}(\alpha \cdot \beta)] J^{(0)}(\sqrt{(x^2 - \alpha^2)(y^2 - \beta^2)}) d\beta.$$

Ma, d'altra parte, soddisfa all'equazione anche la funzione  $\cos(x \cdot y)$  ed essa pure si riduce ad 1 sugli assi, onde possiamo asserire che

$$\cos(x \cdot y) = 1 - \int_0^x d\alpha \int_0^y [\alpha \beta + \operatorname{sen}(\alpha \cdot \beta)] J^{(0)}(\sqrt{(x^2 - \alpha^2)(y^2 - \beta^2)}) d\beta$$

poichè unica è la soluzione della (23) che assume sugli assi valori prefissati.

Questa relazione può anche essere scritta :

$$\cos(x \cdot y) = J^{(0)}(x \cdot y) - \int_0^x u du \int_0^y \frac{\operatorname{sen} \sqrt{(x^2 - u^2)(y^2 - v^2)}}{\sqrt{(x^2 - u^2)(y^2 - v^2)}} J^{(0)}(u \cdot v) v dv.$$

Con procedimento analogo si trova :

$$\operatorname{sen}(x \cdot y) = \int_0^x u du \int_0^y \frac{\cos \sqrt{(x^2 - u^2)(y^2 - v^2)}}{\sqrt{(x^2 - u^2)(y^2 - v^2)}} J^{(0)}(u \cdot v) v dv$$

$$e^{xy} = J^{(0)}(ixy) + \int_0^x u du \int_0^y \frac{e^{\sqrt{(x^2 - u^2)(y^2 - v^2)}}}{\sqrt{(x^2 - u^2)(y^2 - v^2)}} J^{(0)}(iuv) v dv.$$

**Fisica** — *Sulla condizione d'equilibrio fra una soluzione diluita ed il solvente puro separati da un diaframma semipermeabile o dal vapore del solvente.* Nota di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Sebbene la teoria osmotica delle soluzioni diluite sia fondata in modo inoppugnabile sui due principî di termodinamica e sebbene un numero grandissimo di esperienze abbia confermato la giustezza dei risultati che se ne deducono, tuttavia (come avviene spesso nelle dimostrazioni termodinamiche) essa lascia oscuri alcuni particolari, la cui delucidazione sebbene non necessaria, nè per la retta intelligenza nè pel retto uso della teoria stessa, può riuscire interessante ed utile.

1. *Due forme della condizione d'equilibrio delle molecole d'un liquido chimicamente omogeneo.* — Per trovare la condizione d'equilibrio fra solvente puro e soluzione separati da un diaframma semipermeabile, nella superficie di contatto mi sono servito di due relazioni ottenute dal van der Waals e riferite nel suo celebre trattato (<sup>1</sup>), le quali danno due forme della condizione d'equilibrio di un numero grandissimo di molecole (considerate come punti materiali) in moto persistente ed attraentisi. L'una di esse per le molecole che occupano lo spazio di 1 cm.<sup>3</sup> è:

$$(1) \quad \sum mV^2 = 3(P + p)$$

dove  $m$  è la massa,  $V$  la velocità in cm. di una qualsiasi di esse molecole,  $P$  la pressione interna dovuta all'attrazione reciproca delle molecole e non misurabile direttamente,  $p$  la pressione esterna misurabile col manometro, espresse entrambe in dine per cm<sup>2</sup>.

L'altra relazione che vale per i liquidi, per 1 cm.<sup>3</sup> e per  $p = 0$  è:

$$(2) \quad \sum mV^2 = 3 \left[ K + \frac{H}{2} \left( \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1} \right) \right]$$

dove  $K$  ed  $H$  sono le note costanti di Laplace che rappresentano rispettivamente la pressione dovuta alla coesione, non misurabile direttamente, in un liquido limitato da superficie piane, e la pressione dovuta alla coesione per effetto delle curvature principali  $1/\varrho$  ed  $1/\varrho_1$  della superficie, se questa non è piana.

Non ho creduto necessario pel mio scopo di tener conto della composizione ed estensione delle molecole; qualche saggio che ho fatto in proposito

(<sup>1</sup>) Van der Waals, *Die Continuität des flüssigen und gasförmigen Zustandes*, pp. 12 e 27.

colla guida del suddetto trattato non ha condotto a modificazioni essenziali dei risultati.

Se tutte le molecole sono della stessa specie,  $m$  è un fattore comune nella somma  $\sum mV^2$ , dimodochè se si intende con  $V^2$  la media aritmetica dei quadrati delle velocità delle singole molecole, e con  $N$  il numero di queste per  $\text{cm}^3$  invece di  $\sum mV^2$  potrà scriversi  $NmV^2$  o anche  $DV^2$  essendo  $D = Nm$  la densità del complesso di molecole. Per comodità e semplicità di scrittura ho quasi sempre usato  $D$  invece di  $Nm$  sebbene quest'ultima espressione debba essere sottintesa (ossia  $D$  s'intende diviso o moltiplicato per  $m$ ) perchè i risultati dipendono dal numero di molecole e non dalla densità, e riescono più generali se ci si riferisce al primo di questi dati.

La prima delle suddette relazioni può dunque scriversi:

$$(1)' \quad DV^2/3 = P + p$$

e se essa si riferisce alle molecole di un liquido pesante che si trovano ad una certa profondità, per le molecole ad una profondità  $\pm h$  maggiore si avrà, se si suppone trascurabile la compressibilità:

$$DU^2/3 = P + p \pm hD \cdot 980 = DV^2/3 \pm hD \cdot 980$$

se  $U$  è la velocità di queste molecole; si ha dunque:

$$(3) \quad U^2 = V^2 \pm 3h \cdot 980.$$

Entrambe le costanti  $K$  ed  $H$  di Laplace, rappresentano integrali multipli col fattore costante  $D^2$ , che deriva dall'ipotesi che l'attrazione di due elementi di massa sia proporzionale al prodotto delle relative masse o densità, ciò che nell'ipotesi della continuità della materia è ammissibile, poichè riposa sul concetto di massa.

Tale proporzionalità non è più così evidente se si ammette la costituzione molecolare dei liquidi, perchè al crescere della densità o (per uno stesso corpo) del numero di molecole per  $\text{cm}^3$ , cresce in proporzione la massa attraente ma inoltre decresce la distanza delle molecole attraentisi.

Tuttavia l'esperienza (che sola può servir di guida in questo caso, visto che il meccanismo della coesione ci è quasi totalmente ignoto) dimostra che essa proporzionalità realmente sussiste, come risulta dalla costanza del termine  $a/v^2$  ossia  $aD^2$  nella formula di van der Waals. Perciò ho creduto conveniente porre in evidenza il fattore  $D^2$  e scrivere la condizione (2) d'equilibrio per un liquido senza peso, limitato da una superficie di raggio  $r$ , nel modo seguente:

$$(2)' \quad DV^2/3 = D^2K + D^2H/r$$

dove per  $K$  ed  $H$  si intendono le costanti di Laplace divise pel quadrato della densità del liquido che si considera. Siccome dai seguenti ragionamenti

risulterà che la pressione dovuta alla coesione dipende talora dal numero delle molecole e non dalla loro natura, sarebbe opportuno anche in questo caso introdurre esso numero invece della densità.

2. *Condizioni d'equilibrio per un liquido chimicamente eterogeneo (solvente e corpo disciolto).* — Se il liquido non è composto di molecole tutte della stessa specie, ma, come avviene per una soluzione, ne contiene di due specie, si potrà stabilire separatamente per ciascuna di queste la condizione d'equilibrio; così indicando coll'indice o coll'apice 1 le quantità che si riferiscono al solvente e coll'indice o apice 2 quelle che si riferiscono al corpo disciolto ed indicando con  $K'_1$  ed  $H'_1$  le pressioni dovute all'attrazione del solvente pel solvente, con  $K''_2$  ed  $H''_2$  quelle dovute all'attrazione del corpo disciolto pel corpo disciolto e con  $K'_1$ ,  $H'_1$  oppure  $K'_2$ ,  $H'_2$  quelle dovute alle attrazioni del solvente pel corpo disciolto, la condizione d'equilibrio per le molecole del solvente sarà

$$(4) \quad D_1 V_1^2 / 3 = N_1 m_1 V_1^2 / 3 = D_1^2 K'_1 + D_1 D_2 K'_2$$

e quella pel corpo disciolto sarà

$$(5) \quad D_2 V_2^2 / 3 = N_2 m_2 V_2^2 / 3 = D_2^2 K''_2 + D_1 D_2 K'_2$$

3. *Condizione d'equilibrio fra solvente puro e soluzione separati da una superficie semipermeabile.* — Considero ora due strati adiacenti, uno di soluzione l'altro di solvente puro, sottostante, separati da una superficie permeabile al solo solvente. Le pressioni che tendono a far scendere il solvente della soluzione verso il solvente puro o ad opporsi a tale movimento, attribuendo alle prime il segno + alle seconde il segno —, sono: la pressione cinetica del solvente della soluzione, ossia tenendo conto della pressione e della sua influenza sulla velocità,  $D_1 U_1^2 / 3$ ; l'attrazione che il solvente puro esercita sul solvente della soluzione cioè +  $D D_1 K'_1$ ; l'attrazione che il solvente della soluzione esercita su se stesso —  $D_1^2 K'_1$ ; l'attrazione che il corpo disciolto esercita sul solvente della soluzione cioè: —  $D_1 D_2 K'_2$ .

D'altra parte le pressioni che agiscono sul solvente puro e tendono a farlo salire verso la soluzione o ad opporsi a tale movimento sono: la pressione cinetica del solvente puro —  $D V_1^2 / 3$ , l'attrazione che esso subisce dal solvente della soluzione e dal corpo disciolto cioè rispettivamente —  $D D_1 K'_1$  e —  $D D_2 K'_2$ ; l'attrazione che esso esercita su sè stesso cioè +  $D^2 K'_1$ .

Per l'equilibrio la somma algebrica di queste pressioni dev'esser nulla cioè dev'essere:

$$(6) \quad D_1 U_1^2 / 3 - D V_1^2 / 3 = D_2 (D + D_1) K'_2 - (D^2 - D_1^2) K'_1$$

In una Nota antecedente dopo aver dimostrato elementarmente l'influenza della pressione sulla velocità molecolare dei liquidi, ammisi come

condizione d'equilibrio osmotico  $D_1 U_i^2 = DV_i^2$ , ammisi cioè che la maggior velocità delle molecole del solvente nella soluzione compensasse esattamente il loro minor numero, supponendo che almeno nel caso di soluzioni diluitissime che differiscono pochissimo dal solvente puro, la risultante delle varie attrazioni fosse trascurabile. Difatti essa, che è espressa dal 2° membro della (6), è piccolissima se  $D_2$  è piccolissimo e  $D_1$  pochissimo differente da  $D$ , ma in tal caso anche il valore del 1° membro è piccolissimo, e non è lecito trascurare uno dei due rispetto all'altro. Così se la diluizione fosse infinita ciascuno dei membri si ridurrebbe ad un differenziale p. es.  $dP$  e  $dA$  e la condizione d'equilibrio sarebbe  $dP = dA$  non  $dP = 0$ .

D'altronde l'esperienza dimostra che la condizione d'equilibrio  $D_1 U_i^2 = DV_i^2$ , ossia  $D_1 V_i^2 + 3hD_1 \cdot 980 = DV_i^2$  è inesatta; difatti se ne ricava  $h = V_i^2(D - D_1)/D_1 \cdot 3 \cdot 980$  e per un'altra soluzione equimolecolare nello stesso solvente, nella quale sia  $D'_1$  la densità del solvente si avrebbe pure  $h = V_i^2(D - D'_1)/D'_1 \cdot 3 \cdot 980$ , ossia poichè ha lo  $h$  stesso valore entrambe le soluzioni  $(D - D'_1)/(D - D_1) = D_1/D'_1 = 1$  per soluzioni molto diluite, ciò che l'esperienza non conferma come si può chiaramente vedere per le soluzioni equimolecolari acquee di alcool, glicerina, zucchero ecc. E' bensì vero che per soluzioni diluitissime  $D - D'_1 = 0$  ed altresì  $D - D_1 = 0$  ma ne risulta  $(D - D'_1):(D - D_1) = 0:0$  cioè indeterminato e non necessariamente nullo].

Sostituendo a  $DV_i^2$  il valore  $D^2K'_1$  dato dalla (2)' per  $r = \infty$ , a  $D_1 U_i^2$  il valore  $D_1 V_i^2 + 3hD_1 \cdot 980$  dato dalla (3) e poscia a  $D_1 V_i^2$  il valore  $D_1^2 K'_1 + D_1 D_2 K'_2$  dato dalla (4) la (6) si riduce a

$$(6)' \quad hD_1 \cdot 980 = DD_2 K'_2$$

ossia osservando che la (5), se  $D_2$  è molto piccolo, si riduce a:  $D_2 V_2^2/3 = D_1 D_2 K'_2$ :

$$(6)'' \quad hD_1 \cdot 980 = D_2 V_2^2/3.$$

Cioè nel caso d'una soluzione molto diluita nella quale  $D_2$  possa trascurarsi rispetto a  $D$  e a  $D_1$  e possa ritenersi approssimativamente  $D = D_1$ , si ha l'equilibrio fra il solvente e la soluzione adiacenti alla superficie semipermeabile quando l'eccesso di pressione della soluzione rispetto al solvente (ossia la pressione osmotica) è uguale alla pressione dovuta all'attrazione del corpo dissolto pel solvente puro, oppure quando essa pressione osmotica è uguale alla pressione del corpo dissolto considerato come un gaz, pel quale valgano le leggi di Boyle, di Gay-Lussac e d'Avogadro. Questa forma della condizione d'equilibrio è quella generalmente in uso, ma anche la prima, che le è equivalente (ciò che prova la sua giustezza), può talora esser utile, come nei casi seguenti.

Non mi sono occupato di altre possibili azioni del diaframma sul solvente o sulla soluzione, all'infuori della semipermeabilità, perchè esse non potrebbero modificare il risultato finale senza causare una contraddizione col primo principio di termodinamica ed introdurrebbero quindi una complicazione inutile nel ragionamento, come risulta dal fatto che la stessa altezza osmotica può ottenersi teoricamente e sperimentalmente perfino con un diaframma del tutto impermeabile.

4. *Indipendenza dell'attrazione molecolare dalla massa delle molecole; ipotesi sulla natura di questa attrazione.* — È notevole la seguente conseguenza che si deduce dalla condizione di equilibrio (4) del corpo dissolto. Se si suppone che  $D_2$  sia trascurabile rispetto a  $D_1$ , almeno per approssimazione, essa si riduce, trascurando una piccolezza di 2º ordine, a:

$$D_1 D_2 K'_2 = D_2 V^2_2 / 3$$

ossia in una soluzione diluita l'attrazione del corpo dissolto pel solvente è uguale alla pressione del corpo dissolto considerato come un gaz e quindi a temperatura costante non dipende che dal numero delle molecole di questo per cm.<sup>3</sup> e non dal peso molecolare del corpo dissolto nè da quello del solvente e cresce proporzionalmente alla temperatura assoluta.

Questa indipendenza dell'attrazione molecolare dalla massa delle singole molecole che si attirano, appare strana se tale attrazione si considera come un caso particolare della gravitazione universale, ma siccome l'effetto di questa è noto e non basta, di gran lunga, a dar conto degli effetti della coesione, non rimane per spiegare questa, altra causa nota che l'attrazione fra le cariche elettriche delle molecole convenientemente orientantisi nonostante il loro movimento. In tale ipotesi l'attrazione non dipenderebbe affatto dal peso delle singole molecole ma bensì dal loro numero, che determina la quantità delle masse elettriche agenti e la loro distanza. Essa ipotesi darebbe altresì una spiegazione della legge delle attrazioni a distanza posta dal Laplace a base del suo calcolo della risultante della coesione, cioè che esse attrazioni sono insensibili a distanze apprezzabili delle masse attraentisi, poichè le masse elettriche di ciascuna molecola essendo uguali, contrarie e vicinissime, le loro azioni si elidono a distanze apprezzahili. Spiegherebbe inoltre perchè fra due solidi rigidi, per quanto perfettamente combacianti e premuti l'un contro l'altro, l'adesione è molto minore della coesione; la distanza fra le molecole è bensì ridotta al minimo, ma l'orientazione delle molecole non è quella opportuna.

La suddetta indipendenza dell'attrazione dalla massa serve altresì a spiegare l'uguaglianza della tensione di vapore di soluzioni equimolecolari di corpi diversi nello stesso solvente; tuttavia essa non va intesa che approssimativamente e nelle condizioni per le quali fu ottenuta.

5. Cause della minor tensione di vapore delle soluzioni rispetto al solvente e dell'uguaglianza di tensione delle soluzioni equimolecolari. -- La minor tensione di vapore delle soluzioni rispetto a quella del solvente puro può essere attribuita precipuamente a due cause, cioè alla minor densità del solvente, ossia al minor numero di molecole evaporabili per cm.<sup>3</sup> o anche per cm.<sup>2</sup> di superficie ed alla attrazione del corpo disciolto nel solvente, la quale agendo sul solvente liquido si oppone alla sua evaporazione ed agendo sul vapore del solvente ne facilita la condensazione.

A prima vista l'efficacia della prima causa può essere messa in dubbio, poichè se D'<sub>i</sub> e D''<sub>i</sub> sono le densità del solvente in due soluzioni equimolecolari di due diversi corpi, ossia N'<sub>i</sub> ed N''<sub>i</sub> i numeri rispettivi di molecole per cm.<sup>3</sup> e p' p'' le tensioni di vapore si dovrebbe avere:

$$\frac{p - p'}{p - p''} = \frac{D - D'}{D - D''} = \frac{N - N'_i}{N - N''_i}$$

ossia poichè p' = p'' dovrebbe essere

$$(D - D'_i)/(D - D''_i) = 1$$

ciò che non è confermato dall'esperienza; se le soluzioni fossero diluitissime potrebbe bensì la suddetta frazione divenire 0/0.

Si può tuttavia dimostrare che entrambe le cause suddette sono equivalenti se convenientemente interpretate e conducono allo stesso valore di p - p'.

Ad un numero grandissimo N<sub>1</sub> di molecole del solvente aggiungo un piccol numero N<sub>2</sub> di uguali molecole che si mescoleranno uniformemente colle prime, ma la cui azione considero separatamente. Si hanno così precipuamente le seguenti azioni: 1° attrazione reciproca delle N<sub>1</sub> molecole sulle N<sub>1</sub> medesime (cioè di ognuna su tutte le altre); 2° attrazione reciproca delle N<sub>1</sub> sulle N<sub>2</sub>; 3° attrazione delle N<sub>2</sub> sulle N<sub>2</sub> stesse; 4° evaporazione di un certo numero n<sub>1</sub> per secondo delle N<sub>1</sub> molecole; 5° evaporazione di un numero proporzionale n<sub>2</sub> delle N<sub>2</sub>; n<sub>1</sub> ed n<sub>2</sub> devono essere proporzionali ad N<sub>1</sub> ed N<sub>2</sub> perchè questi due gruppi di molecole non differiscono l'uno dall'altro se nonchè per diverso numero. Quindi se chiamiamo p la tensione di vapore del solvente e p' quella parziale che è dovuta solo alle n<sub>1</sub> molecole che si evaporano e condensano si ha:

$$\frac{p'}{p} = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \quad \frac{p - p'}{p} = \frac{n_2}{n_1 + n_2}.$$

Le azioni 2 e 3 compensano esattamente, negli effetti sulla tensione di vapore, quella 5; difatti se togliamo dal liquido le N<sub>2</sub> molecole suddette vengono a mancare tanto le azioni 2 e 3 che tendono a far diminuire la tensione di vapore quanto l'azione 5 che tende a farla aumentare, ora siccome

la tensione del liquido rimane immutata, ne segue che le suddette azioni producono effetti uguali e contrari. Si ha dunque che sulla tensione di vapore l'evaporazione dovuta alle  $N_2$  molecole produce un effetto uguale e contrario all'attrazione di esse  $N_2$  molecole sulle  $N_1 + N_2$ .

Sostituendo ora le  $N_2$  molecole di solvente con altrettante di un corpo solubile in esso e non volatile e facendo astrazione dalla variazione di volume possibile, le attrazioni cioè le azioni 1, 2, 3 rimangono approssimativamente immutate perchè si è visto che in queste condizioni esse dipendono dal numero e non dalla natura delle molecole, l'evaporazione delle  $n_1$  molecole rimane invariata e solo viene a mancare il numero  $n_2$  di molecole di vapore prodotto dalle  $N_2$  molecole di solvente. Si può dunque considerare la diminuzione della tensione come causata dalla diminuita evaporazione per effetto delle molecole non evaporabili del corpo disciolto che ne sostituiscono altrettante del solvente. Si ha dunque anche in questo caso:

$$\frac{p - p'}{p} = \frac{n_2}{n_1 + n_2} = \frac{N_2}{N_1 + N_2}.$$

Siccome però l'effetto della mancata evaporazione è uguale e dello stesso segno di quello dell'attrazione delle  $N_2$  molecole del corpo disciolto sulle  $N_1$  del solvente (trascurando  $N_2$  rispetto ad  $N_1$ ) si potrà prendere questa come misura per la diminuzione di tensione. Si avrà così poichè anche l'evaporazione prodotta dalla  $N_1$  molecole è di effetto uguale e contrario all'attrazione reciproca delle  $N_1$  molecole:

$$\frac{p - p'}{p} = \frac{N_1 N_2 K'}{N_1^2 K'} = \frac{N_2}{N_1}$$

usando come misura delle attrazioni  $N_1 N_2 K'$  invece di  $D_1 D_2 K$  e  $N_1^2 K'$  invece di  $D^2 K$  usati precedentemente.

Da questa relazione ottenuta indipendentemente dall'osmosi si ricava per l'altezza  $h'$  d'una colonna di vapore in equilibrio, avente le tensioni  $p'$  in cima e  $p$  in basso:

$$h' = \frac{p - p'}{3.980} = \frac{1}{980} \frac{N_2 p}{N d} = \frac{1}{3.980} \frac{N_2}{N} v^2$$

se  $v$  e  $d$  sono la velocità molecolare e la densità assoluta del vapore.

Dalla (6) l'altezza osmotica della soluzione di  $N_2$  molecole in  $N_1$  di solvente è:

$$h = \frac{1}{d.980} \frac{D_2}{D} V_1^2 = \frac{1}{3.980} \frac{N_2 m_2}{N m_1} V_2^2$$

e poichè il corpo disciolto si può considerare come un gaz sarà  $m_1 v^2 = m_2 V_2^2$  e quindi le altezze  $h$  ed  $h'$  benchè riferentisi a fenomeni diversi sono uguali.

6. *Influenza della curvatura della superficie d'un liquido sulla tensione del suo vapore.* — La relazione fra la tensione di vapore di un liquido, la curvatura della sua superficie e la corrispondente altezza capillare può essere dedotta dalla condizione d'equilibrio (2)' fra la pressione dovuta alla velocità delle molecole e quella dovuta a la coesione, quando si tenga conto dell'azione del vapore che pure contribuisce all'equilibrio, poichè senza di essa (p. es. in uno spazio illimitato) la pressione dovuta alla velocità predominerebbe e farebbe evaporare tutto il liquido.

Se  $p$  è la tensione del vapore,  $d$  la sua densità sopra una superficie piana del liquido,  $v$  la sua velocità molecolare, la (2)' diviene :

$$DV^2/3 - dv^2/3 = D^2K - d^2K$$

ossia :

$$p = dv^2/3 - d^2K = DV^2/3 - D^2K.$$

Se invece la superficie del liquido è p. es. convessa e di raggio  $r$ , la pressione unitaria dovuta alla coesione sarà  $K + H/r$ , la velocità delle molecole del liquido sarà  $U$ , la tensione e densità del vapore  $p'$  e  $d'$  e la condizione d'equilibrio diverrà :

$$\frac{1}{3} DU^2 - \frac{1}{3} d'v^2 = D^2\left(K + \frac{H}{r}\right) + Dd'\left(K - \frac{H}{r}\right) - Dd'\left(K + \frac{H}{r}\right) - d'^2K.$$

In questa relazione è stata introdotta l'attrazione del liquido pel vapore e quella reciproca perchè le pressioni non sono esattamente uguali e contrarie, mentre lo sono se la superficie del liquido è piana. Si ha dunque :

$$p' = \frac{1}{3} d'v^2 - d'^2K = \frac{1}{3} DU^2 - D^2\left(K + \frac{H}{r}\right) + 2Dd'\frac{H}{r}.$$

Ora  $DU^2/3 = DV^2/3 + hD.980$ ,  $D^2H/r = hD.980$  se  $h$  è l'altezza capillare corrispondente al menisco di raggio  $r$ , e  $2Dd'.H/r = 2hd'.980$ . Si ottiene così eseguendo le riduzioni :

$$p' = DV^2/3 - D^2K + 2hd'.980 = p + 2hd'.980.$$

Si ottiene quindi per  $p' - p$  il valore  $2hd'980$  esattamente doppio del vero, ciò che fa supporre un errore nel ragionamento, che non sia non difficile a correggere.

Se infatti si suppone, come è molto probabile, che il passaggio dalla densità  $d'$  del vapore a quella  $D$  del liquido non sia discontinuo ma avvenga gradatamente, lo strato di liquido che subisce la pressione  $d'v^2/3$  del vapore, e che esercita su di esso e ne subisce l'attrazione reciproca non ha la densità  $D$  dell'interno del liquido, ma bensì una intermedia fra  $D$  e  $d'$ .

Se si suppone che essa sia  $(D + d')/2$  ossia con molta approssimazione  $D/2$  si ha per l'azione reciproca,

$$\frac{Dd'}{2} \left( K + \frac{H}{r} \right) - \frac{Dd'}{2} \left( K - \frac{H}{r} \right) = Dd'H/r = hd'.980$$

e si ha quindi in conformità del 1° principio di termodinamica:

$$p' = p + hd'.980$$

dove a causa della piccolezza di  $hd'$  si può prendere senza errore  $d'$  invece di  $(d + d')/2$ .

**Fisica** — *Sulla preparazione delle soluzioni colloidali di Selenio.* Nota di A. POCHETTINO, presentata dal Socio BLASERNA.

I metodi finora usati per ottenere delle soluzioni colloidali di selenio sono i seguenti:

a) (H. Schulze <sup>(1)</sup>); per riduzione del  $\text{SeO}_2$  in soluzioni molto diluite neutre con opportune quantità di  $\text{SO}_2$ ; si ottiene così, secondo l'Autore, un liquido rosso presentante per fluorescenza un bel colore bleu.

b) (A. Gutbier <sup>(2)</sup>); per riduzione del  $\text{SeO}_2$  in soluzioni neutre, diluite, tiepide con soluzioni molto diluite (1:2000) di idrato di idrazina; si ottiene in tal modo una soluzione gialla il cui colore diventa rosso se la si riscalda o la si lascia molto tempo a sè; anche secondo quest'Autore la soluzione così ottenuta è fluorescente in bleu. Le soluzioni così ottenute non sono molto stabili; si può ottenerne delle più stabili, secondo C. Paal e H. Koch <sup>(3)</sup>, usando come colloidì protettori i sali di sodio degli acidi lisabinico e protalbinico. Il metodo più semplice è infine quello proposto da:

c) E. Müller ed R. Nowakowski <sup>(4)</sup>; il quale consiste nel far passare una corrente continua ad una tensione di 220 Volta attraverso una cellula elettrolitica contenente acqua pura con elettrodi di platino, dei quali il catodo sia coperto parzialmente di selenio fuso. Appena chiusa la corrente si vede attorno ai punti di contatto Se — Pt sul catodo formarsi una nubecola rossastra che man mano scende in seno al liquido, il quale finisce per rimanere poi colorato in rosso-giallastro tanto per trasparenza che per riflessione.

Le soluzioni così ottenute sono abbastanza stabili, ma, dopo un certo tempo variante da 24 a 48 ore, lasciano precipitare del Se rosso insolubile.

(<sup>1</sup>) Journ. f. prakt. Chemie (2), 32, pag. 390 (1885).

(<sup>2</sup>) Zeit. f. anorg. Chemie, 32, pag. 106 (1902).

(<sup>3</sup>) Berichte, 38, pag. 526 (1905).

(<sup>4</sup>) Beriche, 38, pag. 3779 (1905)

Insieme col Se colloidale si forma del  $\text{SeH}_2$ , il quale, se si opera con corrente a bassa tensione, si ossida in parte per l'ossigeno che si svolge all'anodo e in parte (?) per l'ossigeno dell'aria. Ripetendo le esperienze di Müller e Nowakowski ho osservato alcuni fatti l'esposizione dei quali forma oggetto della presente Nota.

1. Ho cominciato col ripetere queste esperienze usando come elettrodi due lastrine di platino aventi ciascuna un'area di 570 mm.<sup>2</sup> immerse in acqua distillata; sulla lastrina funzionante da catodo era depositata per fusione una goccia di Se allo stato vetroso, del diametro di 1 cm., e dello spessore al centro di circa 1,5 mm.: il voltaggio applicato era di 48 Volta, dato da una batteria di accumulatori. Chiuso il circuito, che contiene oltre la cellula elettrolitica anche un milliamperometro di precisione Siemens-Halske, si osservò in primo luogo, che, contemporaneamente al prodursi della colorazione rossa nel liquido vicino al catodo, *l'intensità della corrente va crescendo a partire dall'istante della chiusura del circuito*; ogni volta che si agita il liquido nella cellula, l'intensità della corrente cala bruscamente per poi risalire, appena cessa l'agitazione, al punto di prima e continuare poi a crescere fino a raggiungere un certo limite che può essere fino di 10 volte il valore iniziale; se durante l'esperienza si mantiene il liquido in continua agitazione l'intensità della corrente cresce ancora, ma raggiunge il suo valore limite in un tempo maggiore.

Quest'aumento dell'intensità della corrente attraversante le cellule si riscontra anche a voltaggi inferiori a 18 Volta. Se si usa una forza elettromotrice inferiore a 1,8 Volta, la formazione di Se colloidale non avviene in modo visibile neppure dopo un passaggio prolungato della corrente; anche in questo caso però l'intensità di essa cresce in principio. Può darsi che ciò sia dovuto alla formazione di acido selenioso (<sup>1</sup>) nella cellula, ma il liquido in essa contenuto non dà traccia di acidità sensibile. Con una forza elettromotrice di 48 Volta e un'intensità media di corrente di 7 milliampère si ottiene in 5 ore una soluzione contenente circa 24 centigrammi di Se per litro (<sup>2</sup>). Non è però possibile determinare con esattezza la concentrazione delle soluzioni così ottenute, perchè, in primo luogo non si sa quanto Se si trasformi in  $\text{SeH}_2$  e poi in  $\text{H}_2\text{SeO}_3$ ; ho inoltre osservato che se si prolunga la durata della corrente elettrica in modo da liberare dal catodo più di 24 centigrammi di Se per litro d'acqua comincia a depositarsi del Se rosso sul fondo della cellula. Ho tentato di concentrare una tale soluzione a bagno maria, ma parte del Se è precipitata in fondo al recipiente allo stato nero vetroso; dializzandola si ha sulla membrana del Se rosso pulvрulento solubile; se la si lascia a sè, dopo circa 24 ore comincia a depo-

(<sup>1</sup>) Vedi Nota di Müller e Nowakowski.

(<sup>2</sup>) Dedotto dalla diminuzione di peso del Se attaccato al catodo.

sitarsi sulle pareti del recipiente del Se formando una tenuissima patina rossa, fortemente aderente, che va sempre più aumentando di densità. Questo deposito, anche dopo allontanato il liquido, presenta per trasparenza un colore bleu e per riflessione un color rosso; dunque la doppia colorazione osservata da Gutbier e da Schulze non sembra dovuta a un fenomeno di fluorescenza; ritorneremo più tardi su quest'argomento.

2. Prendiamo ora una soluzione colloidale di Se preparata con questo metodo e, filtratala con cura, facciamola attraversare da una corrente elettrica, a un voltaggio di 40 Volta, mediante due elettrodi di platino pulito; si vede subito: 1) che intorno all'anodo, come già osservò il Biltz<sup>(1)</sup>, si va raccogliendo il Se rosso solubile; 2) che l'intensità della corrente va crescendo; 3) che parte del Se si deposita allo stato rosso sul fondo del recipiente; 4) che man mano il liquido va perdendo il colore rosso e comincia a diventare leggermente bleu per trasparenza; sembra dunque che la grandezza dei granuli del colloide vada cambiando. Se si lascia in riposo la soluzione, l'intensità della corrente, quando si ricomincia, è più bassa, ecco un esempio:

0 <sup>m</sup>	20 <sup>m</sup>	40 <sup>m</sup>	60 <sup>m</sup>	120 <sup>m</sup>
40,5	51	55		62
dopo un intervallo di 15 ore:				
38,5	49	54	58	59
dopo un intervallo di 4 ore:				
37	50	58	60	64
dopo un intervallo di 14 ore:				
37	50	56	58	
dopo un intervallo di 5 ore:				
38	52	58	59	
e dopo un intervallo di 14 ore:				
40	51 $\frac{1}{2}$	59	60	63

In prima linea sono riportati gli intervalli di tempo ai quali venne letta l'intensità della corrente a partire dall'istante della chiusura del circuito, in ogni linea sono poi riportate le intensità di corrente in milliampère corrispondenti a ciascuna serie di determinazioni. Tutte le serie si riferiscono ad una stessa soluzione e all'inizio di ciascuna serie il liquido venne agitato; è notevole il fatto che l'intensità della corrente all'inizio di ciascuna serie riassume sensibilmente il valore di prima. La resistenza elettrica di queste soluzioni così preparate ha un andamento che corrisponde abbastanza bene alle variazioni dell'intensità della corrente su menzionate, mostrando come

(<sup>1</sup>) Berichte, 37 pag. 1095 (1904).

nessun fenomeno secondario importante a questo riguardo si svolga sugli elettrodi. Ho adoperato per queste misure: una coppia di elettrodi a sonda del Köhler, i cui due elettrodi in platino, platinato col solito processo, sono quadrati di un centimetro di lato e disposti parallelamente alla distanza di 6 mm.: e un ponte di Wheatstone, modello Siemens, con rocchetto è telefono. Ho trovato che se la resistenza iniziale corrispondente allo strato di soluzione fra gli elettrodi è di 2970 Ohm, dopo il passaggio della corrente per circa un'ora questa resistenza è solo più di 1998 Ohm; lasciata la soluzione a sè per circa 15 ore, ho trovato una resistenza di 3010 Ohm.

3. Se si fa passare una corrente elettrica attraverso una soluzione diluita di acido selenico, questo si elettrolizza e si può ottenere ancora del Se colloidale; i fenomeni che si presentano sono però oltremodo complicati. Si abbia una cellula voltametrica a elettrodi di Pt ripiena di una soluzione diluita di anidride seleniosa e si applichi una forza elettromotrice di 3 Volta, si osserva che il catodo si va ricoprendo di una patina color rosso che man mano si va facendo sempre più scuro; dopo una diecina di minuti primi comincia a cadere dal catodo del Se rosso, il liquido rimane però sensibilmente incolore e *l'intensità della corrente va calando*; p., es. in un'esperienza, da 18 a 11 milliampère in 50 minuti primi. Se si fa l'esperienza applicando invece una forza elettromotrice di 17 Volta, il catodo si ricopre, in meno di un secondo, di un deposito rosso che crescendo man mano di spessore, diventa poi incoerente e cade sul fondo del recipiente mentre quello rimasto sull'elettrodo va diventando bruno; *l'intensità della corrente rimane sensibilmente costante* (p. es., 120 milliampère). Applichiamo infine una forza elettromotrice di 48 Volta; si ha subito al catodo un deposito rosso che man mano si scioglie nell'acqua mentre *l'intensità della corrente va crescendo*; per es., in un'esperienza da 0,40 a 0,50 ampère in 5 minuti primi; dopo 15<sup>m</sup> il liquido è divenuto color rosso in luce riflessa e bleu per trasparenza mentre il catodo va ricoprendosi di uno strato nero di Se vetroso. Che nel liquido si trovi del Se allo stato colloidale è fuori dubbio perchè, filtrato, rimane color rosso e trattato con una soluzione leggermente acida di cloruro di sodio diventa incoloro mentre precipita sul fondo del recipiente del Se rosso insolubile; che sul catodo si sia depositato del Se allo stato vetroso è anche fuori di dubbio perchè lo strato nero su ricordato presenta tutte le proprietà fisiche e chimiche del Se non conduttore e poi perchè se si lavano i due elettrodi e li si dispone in una vaschetta contenente acqua distillata e poi per questa cellula faccio passare una corrente elettrica di conveniente direzione ho di nuovo la produzione di Se colloidale e il solito fenomeno dell'accrescimento della intensità della corrente.

4. Per esaminare partitamente quello che avviene in vicinanza al catodo e quello che avviene in vicinanza all'anodo, separiamo i due elettrodi mediante un setto poroso disponendo le cose così: in un vaso di vetro po-

niamo un vaso poroso cilindrico di quelli da pile Bunsen (marca Ginori), poi nel vaso esterno mettiamo la lastrina di Pt col Se funzionante da catodo; riempiamo tutto di acqua distillata disponendo le cose in modo che il livello iniziale sia eguale dentro e fuori il vaso poroso e che il livello del liquido fuori rimanga sensibilmente costante per tutta l'esperienza; chiudiamo il vaso poroso masticiandovi sopra un imbuto di vetro col vertice in alto prolungantesi in un tubo di vetro, graduato per poter determinare le variazioni di livello del liquido nella camera catodica, e grande abbastanza perchè i gas svolgentisi nell'elettrolisi possano sfuggire liberamente; quindi facciamo passare la corrente (<sup>1</sup>): il primo fatto che si osserva è il solito formarsi di una soluzione colloidale di Se nella camera catodica, poi un aumento dell'intensità della corrente e infine una marcata cataforesi che trasporta l'acqua dalla camera anodica nella catodica. Ecco, per esempio, il risultato di un'esperienza scelta a caso fra le molte eseguite:

Intervallo di tempo dalla chiusura del circuito . . .	0m	1m	7m	23m	29m	54m	55m	67m	92m	97m	105m	115m
Cm. <sup>3</sup> di acqua trasportati dalla corrente . . . .	—	—	1	7	9 $\frac{1}{2}$	35	37	63	126	136	161	200
Intensità della corrente in milliampère . . . . .	3,3	4,5	7	11	12,5	17,5	17,5	19,5	22	22	22,5	22,5

Dopo circa 25' il liquido che si trova nella camera catodica presenta nettamente una reazione basica e quello nella camera anodica una reazione acida. Se ad un certo punto si rovescia il senso della corrente applicata si osserva: 1) una fuoruscita del liquido dalla camera catodica nella anodica contemporaneamente alla quale nella camera anodica, ove prima si aveva reazione acida, comincia ad avversi reazione basica specialmente nelle vicinanze del vaso poroso; quindi è uscito fuori il liquido basico che era prima nella camera catodica, del colloide però non fuoriesce traccia di sorta; 2) che l'intensità della corrente diminuisce e in un tempo eguale a quello che ha durato la prima operazione ritorna al valore che aveva al principio dell'esperienza. Dall'esame dei risultati ottenuti si può dedurre che il fenomeno della cataforesi è facilitato dalla presenza nella camera catodica della soluzione colloidale di Se, il che del resto è anche dimostrato dalla seguente esperienza: se si mettono in serie due cellule eguali, una delle quali col catodo parzialmente ricoperto di Se, l'altra col catodo di Pt puro e si regolano i livelli del liquido nelle due camere in modo che siano uguali nelle due cel-

(<sup>1</sup>) Nella disposizione da me adottata la superficie porosa attiva è di 184 cm.<sup>2</sup>, la forza elettromotrice applicata di 48 Volta; i due elettrodi sono completamente immersi e sono connessi al circuito mediante fili di Pt di 0,2 mm. di diametro in modo da far sì che la superficie degli elettrodi sia durante tutta l'esperienza sensibilmente la stessa.

lule, si trova che il fenomeno della cataforesi è molto maggiore nelle cellula in cui il catodo è parzialmente ricoperto di Se.

Il passaggio del Se allo stato colloidale avviene in questo metodo senza sviluppo sensibile di calore, infatti ponendo due termometri (sensibili al  $\frac{1}{200}$  di 1°) uno vicino al catodo nella camera catodica e uno fuori si hanno le seguenti temperature successivamente osservate di quarto in quarto d'ora con una corrente di 8 milliampère a 48 Volta:

I (catodo)	20°,35	20°,45	20°,70	20°,90
II (catodo)	26°,40	20°,40	20°,75	20°,94

5. Se invece di usare sul Pt del catodo del Se vetroso, si usa del Se al quale si sia fatta compiere col calore la nota trasformazione in conduttore, si ha una maggiore facilità alla formazione della soluzione colloidale di Se e i fenomeni cataforetici su ricordati si presentano in misura sensibilmente maggiore.

6. Come ho già riferito riguardo all'aumento dell'intensità di corrente che si nota quando si inserisce nel circuito di una corrente una cellula riempita di una soluzione colloidale di Se, ho voluto vedere se l'aumentare dell'intensità di corrente che si nota durante la formazione di queste soluzioni sia dovuto ad un reale aumento di conducibilità del liquido o ad una alterazione degli elettrodi: per la scomparsa graduale di parte del Se vetroso sul catodo, o per il deposito di Se rosso all'anodo o per altra ragione. Ho quindi disposte le cose al solito modo per preparare la soluzione colloidale di Se, e ogni tanto colla sonda del Köhler, già menzionata, andavo a determinare la resistenza del liquido nella cellula nello spazio fra i due elettrodi avendo cura di lavare ogni volta la sonda in acqua distillata e di agitare il meno possibile il liquido nel fare ogni misura, poichè la sonda veniva estratta ad ogni misura. Ecco un esempio dei risultati ottenuti:

Tempo decorso dalla chiusura della corrente . . .	0	16 <sup>m</sup>	28 <sup>m</sup>	58 <sup>m</sup>	117 <sup>m</sup>
Intensità della corrente osservata in milliampère . . .	7	8	9	10	12
Resistenza . . . . .	64000	60000	52000	44000	40000
Intensità della corrente calcolata . . . . .	7	7,4	8,6	10,1	11

Nell'ultima linea sono riportati i valori dell'intensità della corrente calcolati in base alle singole resistenze osservate e all'intensità di corrente osservata all'inizio dell'esperienza; sembra dunque che, almeno entro i limiti

di tempo della misura, la variazione di resistenza della cellula avvenga tutta nel liquido in essa contenuto.

Se si esamina la variazione di resistenza dei liquidi contenuti rispettivamente nella camera anodica e catodica quando i due liquidi si trovino separati dal setto poroso, si giunge a questo risultato:

Appena immersi gli elettrodi le due resistenze corrispondenti alla sonda Köhler sono eguali e di circa 50000 Ohm; ma dopo 10', *senza che il circuito venga ancora chiuso*, mentre nella camera anodica pel liquido compreso nella sonda si ha una resistenza ancora di 50000 Ohm, nella camera catodica si ha una resistenza di 14000 Ohm, dopo 15<sup>m</sup> rispettivamente di 50000 e 13000 Ohm, e dopo circa un'ora: 45000 e 7800 Ohm; appena chiuso il circuito, in ambedue le camere, si ha una forte diminuzione di resistenza, e questa diminuzione è molto più forte nella camera catodica, infatti dopo 1<sup>m</sup> si hanno rispettivamente nella camera anodica e nella catodica resistenze di 44000 e 7700 Ohm, dopo 20<sup>m</sup> di 14200 e 1180 Ohm e infine dopo un'ora circa le due resistenze sono ridotte a 8100 e 697 Ohm rispettivamente.

Mi riservo di studiare in seguito più minutamente questi fenomeni.

7. Noto intanto che in tutte le soluzioni colloidali di Se da me preparate non potei constatare che la luce avesse alcuna influenza nei riguardi della resistenza elettrica.

8. Ho voluto infine studiare l'attrito interno di queste soluzioni colloidali di Se; ho adoperato per ciò il viscosimetro di Ostwald con quattro tubi di calibro e lunghezze differenti sperimentando sempre sulla soluzione più concentrata che mi fu possibile ottenere. Nelle seguenti tabelle sono riportate le durate d'efflusso in minuti secondi di una stessa quantità di acqua distillata e di soluzione colloidale nei diversi tubi a diverse temperature:

Tubo n. 1  $t = 19^{\circ},9$

Acqua	Soluzione	Acqua
67 <sup>s</sup> ,2	67 <sup>s</sup> ,2	67 <sup>s</sup> ,2
67 ,3	67	67
67 ,2	67	67
67	66 ,9	67

Tubo n. 2  $t = 19^{\circ},4$

Acqua	Soluzione	Acqua
124 <sup>s</sup> ,5	124 <sup>s</sup> ,2	124 <sup>s</sup> ,2
124 ,2	124 ,2	124 ,2
124	124 ,2	124

Tubo n. 1  $t = 47^{\circ},5$

Acqua	Soluzione	Acqua
39 <sup>s</sup> ,2	39 <sup>s</sup> ,4	39 <sup>s</sup> ,4
39 ,2	39 ,2	39
39	39	39

Tubo n. 3  $t = 20^{\circ},1$

Acqua	Soluzione	Acqua
1200 <sup>s</sup>	1200 <sup>s</sup>	1190 <sup>s</sup>
1190	1196	1186
1190	1193	1205
1203	1196	1194

*Tubo n. 4 t = 20°,05*

Acqua	Soluzione	Acqua
2743 <sup>s</sup>	2750 <sup>s</sup>	2752 <sup>s</sup>
2752	2750	2754
2752	2752	2751

*Tubo n. 3 t = 50°,1*

Acqua	Soluzione	Acqua
658 <sup>s</sup>	658 <sup>s</sup> ,5	659 <sup>s</sup>
658 ,5	658	659 ,5
657 ,5	658	658

Dobbiamo dunque concludere, come era da aspettarsi, che l'attrito interno delle soluzioni colloidali di Se è sensibilmente lo stesso di quello dell'acqua distillata con cui dette soluzioni vennero preparate.

Soluzioni colloidali di Se preparate col metodo di Gutbier diedero lo stesso identico risultato.

**Chimica.** — *Composti del rame coll'albumina d'uovo* (<sup>1</sup>). Nota di ALBERTO SCALA e GIUSEPPE BONAMARTINI, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Era già noto, per le esperienze di Loeb (<sup>2</sup>), che soluzioni isotoniche di cloruro di sodio, in acqua distillata, sono nocive pel Fundulus e per le sue uova, e che cotesta azione nociva poteva essere annullata, aggiungendo alla soluzione piccole quantità di solfato o di nitrato di calcio, oppure piccole quantità di un cloruro dei metalli seguenti: bario, stronzio e magnesio. Tutti sali cioè con catione bivalente, al quale, secondo Loeb, era veramente dovuta l'azione antinociva specifica.

Però, in seguito, fu dimostrato (<sup>3</sup>) che l'azione nociva di soluzioni isotoniche di cloruro di sodio sui corpuscoli rossi del sangue, poteva essere annullata dal carbonato di calcio, e, sulle opaline, dai carbonati di calcio, di sodio e di potassio. Perciò l'ipotesi della specificità dei cationi bivalenti veniva ad essere assolutamente annullata, dal momento che carbonati con catione monovalente, ed anzi con lo stesso catione del sale nocivo, producevano lo stesso effetto benefico. Da ciò discendeva naturale l'ipotesi che il cloruro di sodio producesse nell'interno dei corpuscoli rossi del sangue e del corpo delle opaline un ambiente acido incompatibile colla vita di coteste cellule o di cotesti esseri monocellulari, abituati a vivere in ambiente neutro e rispettivamente alcalino; perchè un alcali qualsiasi era capace di annullare gli effetti nocivi del cloruro di sodio.

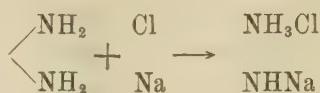
E la formazione dell'ambiente acido interno si suppose che avvenisse per una combinazione del cloruro di sodio colle albumine o materie albu-

(<sup>1</sup>) Lavoro eseguito nell'Istituto di Igiene della R. Università di Roma.

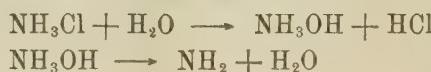
(<sup>2</sup>) *Studies in General Physiology*. Second series, XV, II<sup>a</sup>, 544 e 708.

(<sup>3</sup>) Mengarini Traube Margherita e Scala A., Archivio di fisiologia, 1906, 3, 572; 1907, 4, 605.

minoidi del protoplasma, e precisamente coi loro gruppi ammidici laterali, secondo la forma semplice seguente:



Nella quale il gruppo  $\text{NH}_3\text{Cl}$ , fortemente dissociato ed in parte anche idrolizzato, tende a mettere in libertà l'acido cloridrico ed a ripristinare l' $\text{NH}_2$ :



Nel caso poi che al misuglio, ove si suppone che esista il composto dianzi simboleggiato, si aggiunga un alcali, si stacca il cloro per formare un cloruro e rimane nella molecola il sodio in una forma che, per le esperienze dianzi citate, non è più di ostacolo alle reazioni indispensabili nel processo vitale.

Però, siccome l'accertamento sperimentale delle varie combinazioni o passaggi non era possibile coi metalli alcalini, essendo coteste combinazioni solubili nell'acqua, anzi più solubili delle albumine od albuminoidi stessi da cui provengono (<sup>1</sup>), era necessario di ricorrere ai metalli pesanti, i quali danno composti insolubili.

Difatti Bonamartini e Lombardi (<sup>2</sup>), in una pubblicazione preliminare, hanno dimostrato che trattando l'albume d'ovo, sciolto in maggiore o minore quantità di acqua, con soluzione di solfato di rame sola e con soluzione di solfato di rame e poi con soda, si ottengono due composti, in uno dei quali il rame (Cu) e l'acido solforico ( $\text{SO}_4$ ) si trovano nelle proporzioni stesse che nel solfato; nell'altro invece il rame è in proporzione molto superiore all'acido solforico:

1° composto . . .	Cu	5,26 %	$\text{SO}_4$	7,30
2° composto . . .	Cu	25,18 %	$\text{SO}_4$	7,32

Ciò che rendeva sempre più probabile l'ipotesi avanzata dianzi per il cloruro di sodio, per la quale anche il solfato di rame contrarrebbe colla albumina una combinazione da cui si può liberare acido solforico per dissociazione e per idrolisi, oppure distaccare per mezzo di un alcali. Onde la esistenza di due combinazioni: una con meno rame o *acida*, l'altra con più rame o *neutra*.

Contuttociò, la esistenza di una vera combinazione acida non appariva abbastanza certa; perchè si poteva sempre supporre che il solfato di rame

(<sup>1</sup>) M. Mengarini e A. Scala, Biochem. Zeitschr., 1909, 17, 473 e seg.

(<sup>2</sup>) Rendiconti Soc. Chim. di Roma, 1907, 183; Hoppe-Seyler's Zeitschr. 1908, 58, 165.

fosse unito alla molecola dell'albumina, piuttosto che chimicamente, in quella forma fisica cui è stato assegnato il nome di assorbimento superficiale; anche perchè il composto non era stato assoggettato ad alcun lavaggio o ad alcun altro cimento chimico. E si poteva dubitare ancora che la combinazione neutra fosse un miscuglio di quella acida e di ossido idrato di rame, quantunque gli sperimentatori sopra citati abbiano avuto l'avvertenza di precipitare dal liquido soltanto una parte, e non la totalità dell'albumina.

Quindi, chiara appariva la necessità di nuove indagini per eliminare cotesti dubbi e risolvere definitivamente una questione, che ha importanza, oltrechè scientifica, anche pratica, in quanto riguarda la funzione dei sali minerali negli organismi animali e vegetali.

Abbiamo perciò preparato il sale acido di rame dell'albumina d'uovo, trattando a freddo con soluzione concentrata di solfato di rame, fino a completa precipitazione, una soluzione filtrata di albumine, avendo cura di non aggiungere rame in eccesso, per non ridisciogliere il precipitato. Si lasciava tutto in riposo per qualche ora, poi si filtrava per filtro piano, ed il precipitato, raccolto sul filtro, si faceva sgocciolare nel miglior modo; poi si privava della maggior parte dell'acqua aderente, comprimendolo tra carta bibula a più doppi, rinnovata più volte. Il precipitato, così asciugato, si distaccava dal filtro e si conservava, quando era il caso, in recipiente chiuso.

Ottenuto il composto, abbiamo iniziato esperienze per conoscerne il comportamento verso un lavaggio prolungato con acqua distillata. Perchè, ammessa la forma di combinazione da noi supposta, l'acido solforico ed il rame avrebbero dovuto staccarsi da essa con celerità diversa, avendo sempre però dei punti di contatto colle modificazioni che nello stesso composto apportano gli alcali, funzionando l'acqua come una base.

Nel caso invece che si fosse trattato di una combinazione di assorbimento superficiale, tanto il rame che si eliminerebbe, quanto quello che nel composto potrebbe rimanere, avrebbero dovuto essere nella forma di solfato. Perciò in una esperienza preliminare o di saggio, il precipitato ottenuto, nel modo detto dianzi, da 200 cmc. di soluzione di albumina, è stato lavato sul filtro con acqua distillata fino a che il rame e l'acido soforico, ricercati colle reazioni del ferrocianuro e del cloruro di bario, erano scomparsi dalle acque di lavaggio: per cui sono occorsi molti giorni.

Dopo il lavaggio completo, una parte del precipitato umido, pesata in un ampio crogiuolo di platino, è stata accuratamente ed intimamente mescolata ad una quantità, relativamente abbondante, di un miscuglio di carbonato di sodio e nitro purissimi, e riscaldata, leggermente prima, fortemente poi, fino alla fusione ed alla scomparsa del carbone dalla massa fusa. Dopo raffreddamento, questa si scioglieva nell'acqua distillata; si acidificava la soluzione con acido cloridrico, esente di acido solforico, e si precipitava il rame, aggiungendo cautamente potassa caustica, pure esente di acido solfo-

rico. Si faceva bollire il liquido, per trasformare l'ossido idrato di rame in ossido nero, e si filtrava per filtro, di cui erano note le ceneri. L'ossido si lavava prolungatamente con acqua distillata e si pesava, dopo averlo trattato nel modo conosciuto.

L'acido solforico si determinava nelle acque filtrate e separate dall'ossido di rame nella forma di solfato di bario e nel modo pure conosciuto.

Il residuo insolubile, rimasto sul filtro, ha dato all'analisi il risultato seguente:

Cu in 100 della sostanza umida . . . . .	1,94
SO <sub>4</sub> " " " " . . . . .	1,31
SO <sub>4</sub> necessario per trasformare 1,94 di rame in solfato	2,92
SO <sub>4</sub> in meno. . . . .	1,61

Da cui chiaramente si vede che l'acido solforico ed il rame nel composto lavato non si trovano nella proporzione in cui li troviamo nel solfato, ma l'uno è di gran lunga inferiore all'altro, ad onta che non sia stato tenuto conto dello zolfo contenuto nell'albumina e che pure è stato determinato come acido solforico. In ogni modo, si comprende abbastanza bene che la cifra 1,31 non può essere tutta assegnata all'acido solforico del solfato di rame, che si suppone esistere ancora come tale nel composto lavato; e perciò l'acido solforico perduto dovrebbe essere aumentato di una quantità eguale all'errore, che, in questo caso, non si è potuto calcolare, non conoscendo l'albumina che realmente entra nel composto. Ciò fa supporre che il lavaggio asporti completamente l'acido solforico e che il rame rimanga come in un composto di sostituzione.

Per dimostrare con più certezza questo fatto che è per noi di una importanza grandissima, abbiamo instituito le esperienze che seguono:

Una porzione esattamente pesata del composto, ottenuto e deacquificato nel modo riferito, è stata triturata, insieme con poca acqua, in un mortajo di porcellana, per ridurla una poltiglia finissima, esente di grumi, che poi è stata versata in un grande becher. Il mortajo è stato lavato accuratamente, per non perdere affatto sostanza, e finalmente è stata aggiunta tanta acqua distillata da completare il volume di due litri. Il liquido, mescolato e rimescolato più volte, in tempi diversi, è stato lasciato in riposo per più ore, poi filtrato per filtro piano. Il residuo, rimasto nel becher e sul filtro, è stato nuovamente trattato con due litri di acqua distillata, passato sul filtro e lavato ancora fino alla scomparsa della reazione del rame e dell'acido solforico dalle acque di lavaggio. In questo modo era reso più facile e più celere il lavaggio, poichè con diluizioni così grandi si poteva considerare massima la dissociazione delle parti ionizzate ed anche massima l'idrolizzazione loro.

Il composto lavato si privava della maggior parte dell'acqua nel modo detto e si sottoponeva all'analisi.

In questa serie di esperienze abbiamo determinato il rame e l'acido solforico nel composto che si sottoponeva al lavaggio e contemporaneamente nello stesso lavato, riferendo tutte le analisi alla sostanza secca. Inoltre non abbiamo trascurato di calcolare la quantità di  $\text{SO}_4$  corrispondente allo zolfo contenuto nell'albumina combinata, approfittando della media ottenuta dai risultati di vari sperimentatori e raccolti nello specchietto seguente:

Zolfo in 100 di albumina d'uovo, secca (Hoffmeister)	1,09	$\text{SO}_4$ corrisp.	3,27
" " "	(Schulz)	1,23	" 3,69
" " "	(Hopkins)	1,57	" 4,71
Media . . .	1,296		3,89

Dalle analisi abbiamo ottenuti i risultati seguenti:

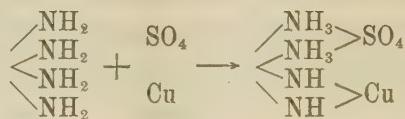
In 100 del composto privò di acqua	PREPARATO N. 1		PREPARATO N. 2		PREPARATO N. 3		PREPARATO N. 4	
	Prima del lavaggio	Dopo il lavaggio	Prima del lavaggio	Dopo il lavaggio	Prima del lavaggio	Dopo il lavaggio	Prima del lavaggio	Dopo il lavaggio
Cu . . . . . . . .	5,07	3,68	8,88	2,88	8,25	3,25	11,16	3,31
$\text{SO}_4$ . . . . . . . .	7,75	3,47	14,03	3,87	14,97	3,58	19,30	4,56
Albumina . . . . .	88,32	94,07	78,10	94,47	77,79	94,39	70,45	93,42
$\text{SO}_4$ corrisp. allo S albumina	3,43	3,65	3,04	3,67	3,03	3,67	2,74	3,63
$\text{SO}_4$ in combinazione col Cu	4,32	0	10,99	0,20	11,94	0	16,56	0,93
Cu corrisp. $\text{SO}_4$ del solfato	2,86	0	7,28	0,18	7,91	0	10,97	0,62
Cu in eccesso . . . . .	2,21	3,68	1,60	2,75	0,34	3,25	0,19	2,69

Dai dati analitici riferiti si vede chiaramente che il precipitato ottenuto trattando soluzioni di albumina con solfato di rame, non contiene il rame e l'acido solforico nella proporzione rigorosa da formare solfato di rame, come è stato creduto fino ad ora, ma il rame vi è sempre in eccesso. Si vede altresì che questo eccesso è variabile e legato strettamente alla concentrazione dell'albumina nella soluzione da cui è stato ottenuto il composto. È minore, cioè, in quei preparati che contengono meno albumina, e maggiore in quelli che ne contengono più. Ovvero è minore in quei preparati ottenuti da soluzioni di albumina piuttosto concentrate, e maggiore in quelli ottenuti da soluzioni piuttosto diluite:

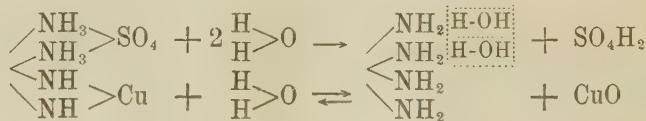
	Albumina	Eccesso Cu
Preparato N. 1 . . . . .	88,32	2,24
" " 2 . . . . .	78,10	1,67
" " 3 . . . . .	77,79	0,41
" " 4 . . . . .	70,45	0,29

Al contrario, nel composto lavato, l'eccesso del rame, salvo piccole differenze, corrisponde alla percentuale del composto stesso, perchè l'acido solforico del solfato, coi lavaggi, si è completamente eliminato, nel tempo che si è eliminata la maggior parte del rame.

Questi fatti confermano l'ipotesi espressa innanzi per le combinazioni del cloruro di sodio colle albumine o materie albuminoidi, e si spiegano in modo identico. Cioè il solfato di rame si combinerebbe ai gruppi ammidici laterali nella forma semplice seguente:



Nella quale il grado di dissociazione e quello di idrolizzazione del gruppo  $\text{NH}_3 > \text{SO}_4$  devono essere diversi e superiori ambedue a quelli del gruppo  $\text{NH} > \text{Cu}$ . Per cui, mentre l'uno tende a scindersi completamente, l'altro tende ad un limite, il quale è segnato dal grado di dissociazione del gruppo  $\text{NH} > \text{Cu}$  divenuto eguale od inferiore a quello del solfato di rame:

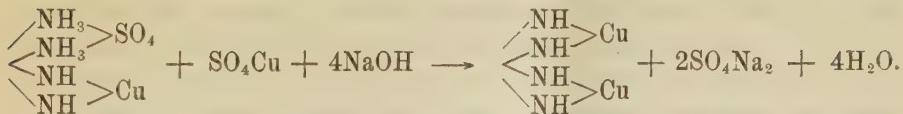


Per la qual cosa, necessariamente, da composti contenenti in origine quantità diverse di rame, si deve arrivare, per semplice lavaggio e per eliminazione conseguente di solfato di rame e di acido solforico a composti di tipo costante non contenenti più acido solforico del solfato e con una quantità identica o pressochè identica di rame, come apparisce dalle cifre di già esposte e che raccogliamo nello specchietto seguente:

	Cu % nel composto non lavato	Cu % nel composto lavato
Preparato N. 1 . . .	5,07	3,68
" " 2 . . .	8,88	2,88
" " 3 . . .	8,25	3,25
" " 4 . . .	11,16	3,81

E che questa spiegazione sia la vera lo dimostra il fatto che, trattando una soluzione di albumina con solfato di rame in leggero eccesso e poi con soluzione di soda, si ottiene un composto con una quantità percentuale di rame che è sempre di gran lunga superiore a quella contenuta in un composto qualsiasi ottenuto senza aggiunta di soda. Perchè questa, oltrechè staccare i gruppi  $\text{SO}_4$ , tende ad introdurre nella molecola altri Cu, ovvero tende

a formare altri gruppi, pochissimo od affatto dissociati:



Poi lo dimostra il fatto che i composti ottenuti, precipitando con solfato di rame soluzioni di albumina più o meno concentrata, contengono quantità diverse di rame. Già di questo abbiamo dovuto brevemente parlare, a proposito del diverso eccesso di rame trovato nei quattro preparati, sottoposti all'analisi; ed abbiamo notato che il minimo eccesso coincideva colla concentrazione massima della soluzione di albumina trattata con solfato di rame. Ora confermiamo il fatto e riferiamo il risultato di alcune esperienze nelle quali si aggiungeva lo stesso volume di soluzione di rame allo stesso volume di soluzione madre concentratissima di albumone d'uovo, mescolata con quantità crescenti di acqua distillata:

Numero d'ordine	VOLMI MESSI IN REAZIONE DI:			Sostanza secca in 100 cmc. di soluzione gm.	Cu in 100 del composto secco gm.
	Albumina concentrata cmc.	Soluzione di $\text{SO}_4\text{Cu}$ conc. cmc.	Acqua aggiunta		
1	35	10	0	16,17	10,46
2	35	10	25	9,44	9,07
3	35	10	50	6,66	8,84
4	35	10	75	5,15	8,00
5	35	10	125	3,54	6,79

Cioè, a mano a mano che cresce la diluizione dell'albumina, diminuisce la quantità del rame nel composto, ovvero diminuisce il numero di molecole di solfato di rame combinate all'albumina. Ciò sta in relazione col grado di dissociazione e di idrolizzazione del gruppo  $\begin{array}{c} \text{NH}_3 \\ | \\ \text{NH}_3 \\ | \\ \text{NH} \\ | \\ \text{NH} \end{array} > \text{SO}_4$ , e quindi colla tendenza del solfato a non passare in combinazione. Aumentando la diluizione ancora si dovrebbe arrivare al composto fisso, quale è stato ottenuto per il lavaggio del precipitato.

Nessuna maraviglia perciò se l'eccesso del rame sull'acido solforico vada aumentando colla diluizione e se qualsiasi composto, anche preparato da soluzione concentratissima di albumina, non possa contenere il rame e l' $\text{SO}_4$  nella proporzione esatta, quale si trova nel  $\text{SO}_4\text{Cu}$ , perchè dissociazione ed idrolizzazione devono avversi anche nel caso di concentrazioni elevate, sebbene in grado minore che in altre. Onde spiegabilissimo apparisce il fatto della variabile quantità di rame in composti dell'albumina d'uovo, ottenuti da sperimentatori diversi, in condizioni diverse. Perchè è evidente che per ottenere lo stesso composto, in ogni caso, è necessario che le soluzioni di albumina e di solfato di rame che reagiscono abbiano sempre la identica con-

centrazione e la identica temperatura. Difatti Bonamartini e Lombardi, così facendo, ottennero un composto pressoché costante, contenente, allo stato secco, 5 per cento circa di rame. Mentre noi, precipitando l'albumine d'uovo quale esiste in natura, con soluzione concentrata di solfato di rame, abbiamo ottenuto un composto contenente 11,16 % di rame, e quantità inferiori con soluzioni meno concentrate di albumina.

In conseguenza di ciò, erroneo a noi sembra il giudizio di molti sperimentatori, per il quale non si devono considerare veri composti i prodotti delle reazioni tra le materie albuminoidi, ed i sali metallici, unicamente per la variabilità di composizione. Ma precisamente su questa interessantissima proprietà dei composti metallici delle albumine o degli albuminoidi è fondato tutto il meccanismo di nutrizione dei varii tessuti degli organismi animali e vegetali, e sopra tutto il trasporto delle sostanze minerali, di cui uno di noi ha diffusamente trattato in altra pubblicazione (<sup>1</sup>). E cade, di conseguenza, l'ipotesi tanto diffusa che i sali minerali facciano, colle albumine o colle materie albuminoidi dei composti fisici di adesione, di assorbimento superficiale o, più barbaramente, di adsorptione. E si spiega perchè del sale che agisce sul colloide rimanga talvolta nella combinazione solo uno dei joni, onde la supposizione di un assorbimento superficiale elettivo di joni.

Del resto, moltissimi sono i fatti, osservati da fisiologi e da chimici, i quali conducono alla esistenza di vere combinazioni tra i sali minerali e le albumine o materie albuminoidi. E non pochi sono i fisiologi che si sono espressi in questo senso; ma la questione è rimasta sempre insoluta, per mancanza di prove dirette.

Con questo lavoro a noi sembra di aver portato un contributo non indifferente e, se non risoluto, di avere sicuramente avviato alla soluzione un problema, che ha preoccupato e preoccupa vivamente fisiologi e chimici.

Prima di metter termine a questo scritto e nell'interesse di dare maggior certezza al fatto che nel lavaggio del composto dell'albumina col solfato di rame si perde acido solforico allo stato libero ed, *in toto*, in quantità superiore al rame eliminato, abbiamo accuratamente raccolte le acque di lavaggio del preparato 4, di cui è stata dianzi riferita l'analisi, le abbiamo concentrate in presenza di carbonato sodico e nitro purissimi e abbiamo determinato il rame e l'acido solforico, come è stato detto altrove.

Abbiamo ottenuto il risultato seguente:

Cu trovato. . . . .	gm.	0,3407
SO <sub>4</sub> " . . . . .	"	0,6348
SO <sub>4</sub> per trasformare il rame in SO <sub>4</sub> Cu . . .	"	0,5197
SO <sub>4</sub> in eccesso . . . . .	"	0,1157

<sup>(1)</sup> Margherita Mengarini e Scala A., loco citato.

Ovvero nei lavaggi si elimina acido solforico allo stato libero, proprio come era stato previsto e dimostrato, operando altrimenti, e che nel composto lavato non vi è più acido solforico del solfato di rame.

Quindi si può con certezza affermare che dalla unione dei sali minerali colle albumine o materie albuminoidi risulta un vero composto a cui si può conservare il nome di acido, che uno di noi gli dette di già, e che questo composto ha la tendenza a trasformarsi, perdendo sale ed acido libero, in altro composto contenente la sola base del sale che ha preso parte alla reazione. Si arriva altresì ad un tipo costante; contenente cioè la stessa quantità di base, qualunque sia la quantità del sale in origine combinato colla albumina, ed a questo composto si può conservare il nome di neutro, perchè neutro reagisce e perchè più non contiene acido dissociabile ed idrolizzabile.

*Chimica. — Ricerca di nuove sostanze fototrope.* Nota II di M. PADOA e F. GRAZIANI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Nella Nota precedente abbiamo esposto i risultati dell'esame da noi fatto degli  $\alpha$ -naftilidrazoni,  $\beta$ -naftilidrazoni e  $p$ -tolilidrazoni di parecchie aldeidi, sotto il punto di vista della fototropia.

Continuando il nostro lavoro metodico abbiamo voluto completare anzitutto le nozioni relative ai fenilidrazoni. I fenilidrazoni della benzaldeide, dell'anisaldeide e del cuminolo sono stati già estesamente studiati da vari autori, e si sa che sono fototropi; dei seguenti, benchè due di essi siano in precedenza già stati preparati, non ci risulta che fosse stata ricercata la proprietà della fototropia.

1. *Fenilidrazone dell'aldeide cinnamica.*

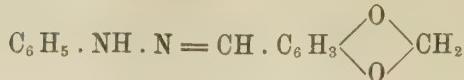


Venne preparato, come indica E. Fischer (<sup>1</sup>), da fenilidrazena sciolta in acido acetico diluito e aldeide cinnamica. Dall'alcool si separa come polvere cristallina, gialla-canarino, che fonde a 171° (secondo Fischer a 168°).

È lievemente fototropo; al sole in parecchi minuti, assume una lieve colorazione cioccolata; ma così lieve, che non si è potuta determinare la temperatura alla quale si scolora per riscaldamento. Però, all'oscuro, la retrocessione è avvenuta in alcuni giorni.

(<sup>1</sup>) Ber. d. Deut. Chem. Ges., 17, 575.

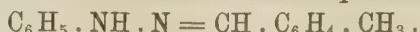
2. *Fenilidrazone del piperonal.*



Si ha come il precedente, e cristallizza dall'alcool in bellissimi aghi bianchi, mediocrementi duri, fondenti a 106°. Rudolph<sup>(1)</sup>, che l'ha precedentemente preparato, gli ha trovato come P. F. 102°-103°.

*Non è fototropo.* Anche Marcus<sup>(2)</sup> e Minunni e Angelico<sup>(3)</sup>, che hanno studiato quest'idrazone, non parlano affatto di questa proprietà.

3. *Fenilidrazone dell'aldeide p-toluica.*

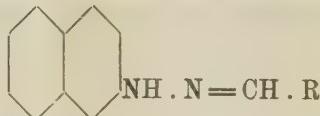


Non ci risulta sia stato finora preparato: si ottiene come gli altri; dall'alcool si separa in polvere cristallina gialla. P. F. 121°.

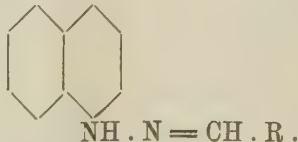
*È debolmente fototropo:* al sole, in pochi minuti, diventa roseo: retrocede, all'oscuro, in qualche giorno: riscaldato a 105°-110°, si scolora prominentemente. Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	13.33	13.41

Dai risultati della precedente ricerca sui naftilidrazoni ci venne l'idea che i derivati sostituiti in posizione *orto*- rispetto all'azoto non potessero essere fototropi, mentre che le posizioni *meta*- e *para*- permetterebbero o favorirebbero la fototropia. Infatti sono fototropi i  $\beta$ -naftilidrazoni



e non gli  $\alpha$ -naftilidrazoni



Sono poi fototropi i *p*-tolilidrazoni



<sup>(1)</sup> Liebigs. Ann., 248, 103.

<sup>(2)</sup> Ber. d. Deut. Chem. Ges., 24, 3656.

<sup>(3)</sup> Gazz. Chim. Ital., 29, II, 425.

Abbiamo voluto vedere se lo sono i *m*-tolilidrazoni: e infatti abbiamo trovato che la fototropia vi si manifesta, benchè meno frequente e meno intensa che per i *para*-; degli *o*-tolilidrazoni, conformemente alle previsioni, nessuno è fototropo.

In quello che segue, riferiamo i dati relativi a questi *m*- e *o*-tolilidrazoni. Sono stati preparati tutti dal cloridrato dell'idrazina, ottenuto diazotando la toluidina, riducendo con cloruro stannoso sciolto in acido cloridrico concentrato, spostando con soda, estraendo con etere, e riprecipitando poi il cloridrato con acido cloridrico concentrato o meglio gassoso. Il cloridrato della tolilidrazina, con le varie aldeidi ed acetato sodico, ci diede gli idrazoni.

4. *m*-tolilidrazone della benzaldeide.



Non ci risulta preparato finora. Dall'alcool cristallizza in finissimi aghetti bianco-giallognoli. P. F. 100°. È fototropo: infatti in 3 o 4 minuti, alla luce del sole, assume una distinta colorazione rosa, che retrocede per riscaldamento a 80° circa. Non abbiamo potuto constatare in quanto tempo si scolori al buio, perchè, lasciato a sè, subisce un'alterazione, dovuta forse a processi d'ossidazione, per cui diventa sempre più rosso, ed abbassa il P. F.  
Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	13.33	13.34

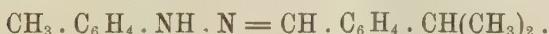
5. *m*-tolilidrazone dell'anisaldeide.



Non sembra sia stato preparato finora. Dall'alcool si ottiene in polvere cristallina gialla, che fonde a 111°. Non è fototropo. Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	11.69	11.74

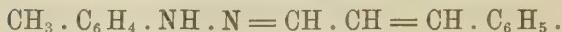
6. *m*-tolilidrazone del cuminolo.



Non ci risultò prima d'ora ottenuto. Cristallizza dall'alcool in aghetti splendenti, bianco-giallognoli, che fondono a 136°. All'aria si altera, colorandosi in rosso, ed abbassando il P. F. È leggermente fototropo: al sole, in pochi minuti, assume una colorazione rosa, ma così debole, che non se ne è potuto fare il punto di scoloramento per azione del calore. Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	11.11	11.12

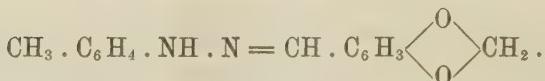
7. *m-tolilidrazone dell'aldeide cinnamica.*



Dall'alcool si ottiene una polvere cristallina gialla, che fonde a 131°. È lievemente fototropo: al sole, in qualche minuto, assume una colorazione cioccolata, ma debolissima, sì che non se ne è potuto fare il punto di scoloramento al calore. Non c'è risultato prima d'ora preparato. Analisi:

	Calcolato	Trovato
N%	11.86	11.83

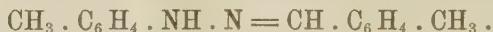
8. *m-tolilidrazone del piperonale.*



L'abbiamo ottenuto mescolando soluzioni alcooliche fredde del cloridrato di *m*-tolilidrazina e dell'aldeide, in presenza di acetato sodico: Dall'alcool bollente cristallizza in aghetti gialli-canarino; P. F. 131°. È fototropo: in 3 o 4 minuti, esposto al sole, diventa rosa intenso, quasi rosso: retrocede se mantenuto al buio 3 o 4 giorni, e prontamente se riscaldato a 115°-120°. Analisi:

	Calcolato	Trovato
N%	11.03	11.11

9. *m-tolilidrazone dell'aldeide p-toluica.*



Non è risultato finora preparato. Dall'alcool si separa come polvere cristallina, gialla-intenso: fonde a 121°. Non è fototropo. Analisi:

	Calcolato	Trovato
N%	12.50	12.59

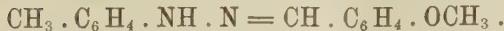
10. *o-tolilidrazone della benzaldeide.*

Venne già preparato da C. Reutt e B. Pawlewski (<sup>1</sup>); P. F. 100°-102°.

Questi Autori hanno osservato che esso si colora fortemente in rosso alla luce, con abbassamento del P. F. a 80°-83°. Ma secondo noi non si tratta affatto di fototropia: giacchè abbiamo ottenuto quest'idrazone cristallizzato dall'alcool in aghetti giallognoli, fondenti a 102°, che si colorano all'aria anche se al buio, ed in ogni caso assai più lentamente di quando si tratta di fototropia: inoltre tale colorazione sembra favorita dall'umidità.

(<sup>1</sup>) Centralblatt, 1903, II, 1432.

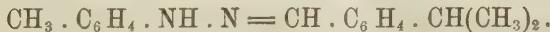
11. *o-tolilidrazone dell'anisaldeide.*



Non c'è risultato mai preparato. Dall'alcool cristallizza in scagliette bianche, lucenti; P. F. 94°. *Non è fototropo.* Alterabilissimo all'aria, ramollendosi, sino a diventare, in pochi giorni, un liquido sciroposo rosso cupo. Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	11.69	11.78

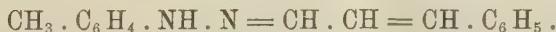
12. *o-tolilidrazone del cuminolo.*



Non ci risulta sia stato preparato finora. Dall'alcool si ha in scagliette color giallo-canarino, lucenti, leggerissime. Fondi a 91°. *Non è fototropo.* È alterabile all'aria, diventando rosso, ed abbassando il P. F. Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	11.11	11.13

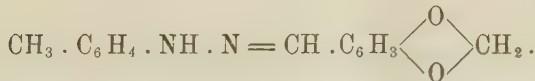
13. *o-tolilidrazone dell'aldeide cinnamica.*



Non risulta preparato finora. Dall'alcool si ottiene in scagliette gialle, lucenti, simili a colofonia: fondi a 118°. *Non è fototropo.* Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	11.86	11.72

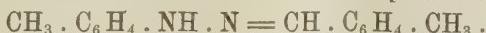
14. *o-tolilidrazone del piperonal.*



Non sembra sia stato preparato finora. Cristallizza dall'alcool in squamme gialle, lucenti. P. F. 87°. *Non è fototropo.* Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	11.03	10.90

15. *o-tolilidrazone dell'aldeide p-toluica.*



Non risulta prima d'ora preparato. Dall'alcool si ha in scagliette giallo-chiaro, lucenti, che fondono a 109°. *Non è fototropo.* È alterabile all'aria, specialmente se umida, diventando rosso. Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	12.50	12.62

Abbiamo intenzione di proseguire la ricerca per vedere se le regole trovate per la fototropia dei composti finora esaminati possano estendersi ad altre serie, e se possano trovarsi altre relazioni tra la fototropia e la costituzione. Vogliamo accennare ancora che sembrerebbe esistesse un certo parallelismo fra le relazioni che si osservano tra fluorescenza e costituzione chimica (<sup>1</sup>) e quelle che ora ci occupano. Così la posizione *para*- favorisce fluorescenza e fototropia; così i nitrogruppi impediscono entrambe (<sup>2</sup>); vedremo in seguito fin dove si spinga questa analogia.

**Mineralogia.** — *Su un notevole cristallo di scheelite di Traversella.* Nota del dott. AURELIO SERRA, presentata dal Socio G. STRUEVER.

**Botanica.** — *La partenocarpia nel Diospyros virginiana L.* Nota di B. LONGO, presentata dal Socio R. PIROTTA.

**Patologia vegetale.** — *Osservazioni sopra alcune malattie dell'olivo.* Nota di L. PETRI, presentata dal Socio G. CUBONI.

**Zoologia.** — *Sulle spermatogonie della Tryxalis.* Nota preliminare del dott. G. BRUNELLI, presentata dal Socio B. GRASSI.

**Zoologia.** — *Intorno al Rhizoglyphus echinopus* (Fum. e Rob.) Moniez, *e ad un altro acaro vivente con esso sulle radici di viti.* Nota preliminare della dott. ANNA FOÀ, presentata dal Socio B. GRASSI.

Queste Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

(<sup>1</sup>) Kauffmann, *Beziehungen zwischen Fluoreszenz und Chemischer Konstitution.* Ahrens' Sammlung, Band XI.

(<sup>2</sup>) Il dott. R. Ciusa, che ebbe occasione di preparare molti nitrofenilidrazoni, ci comunica che nessuno di quelli era fototropo.

## RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio GRASSI, a nome anche dei Soci STEFANI, relatore, e LUCIANI, legge una Relazione colla quale si propone l'inserzione negli Atti accademici di una Memoria del prof. Lo MONACO intitolata: *Sulla Fisiologia di alcune delle parti più interne e meno aggressibili del cervello.*

Analoga proposta vien fatta con un'altra Relazione dal Corrisp. VIOLA, relatore, a nome anche del Socio STRÜVER, sulla Memoria del dott. FERRARI avente per titolo: *Studio chimico e microscopico delle rocce granito-pegmatitiche del giacimento di Groppo Maggio nell'Appennino Parmense.*

Le conclusioni delle Commissioni esaminatrici, poste ai voti dal PRESIDENTE, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio LEVI-CIVITA legge la seguente Commemorazione del Socio professor VALENTINO CERRUTI:

Arduo è il ritrarre chi pur lascia di scritti e d'opere ricco retaggio, ove manchi il sussidio delle delicate sfumature, che soltanto una personale consuetudine può suggerire.

Compito siffatto mi impone oggi il noviziato accademico, dal quale fui designato a commemorare VALENTINO CERRUTI.

Riassumerò, come meglio mi è dato, quanto appresi frugando con pietosa reverenza nel suo archivio personale, rivolgandomi a chi ebbe con lui più stretti legami (<sup>1</sup>), cercando di penetrarne l'eletto pensiero attraverso le pubblicazioni scientifiche.

\* \* \*

Valentino Cerruti, terzogenito di Agostino e di Innocenza Maria, vide la luce il 14 febbraio 1850 a Crocemosso nell'industre circondario di Biella.

Il padre, valente capotecnico, cui non pochezza di mente ma scarsità di coltura aveva precluso il passaggio a più elevate mansioni, fidente nel-

(<sup>1</sup>) Adempio a ben gradito dovere esprimendo schietta riconoscenza alla sig.<sup>a</sup> Adele Cerboni Cerruti, al sig. dott. Giovanni Battista Cerruti, moglie e fratello dell'illustre Compianto; ai sigg. prof. Alberto Tonelli, rettore dell'Università di Roma, prof. Roberto Marcolongo dell'Università di Napoli, prof. Lucio Silla, assistente di meccanica razionale all'Università di Roma, per il valido soccorso di dati, notizie e reminiscenze, onde mi furono squisitamente cortesi.

nell'ottobre 1877, fu nominato, in seguito a pubblico concorso, professore straordinario.

Raggiunta nobilmente la metà, tutta rivolse la straordinaria energia alle ricerche originali; donde un triennio di intensa produzione scientifica, che ne affrettò la promozione ad ordinario (maggio 1881), e a cui possono riportarsi le sue concezioni più vigorose, se non le conclusioni più notevoli.

Mi si consenta di renderne conto.

A caratterizzare le piccole oscillazioni di un solido interamente libero son fatte intervenire con sagace iniziativa due sestuple di rette in corrispondenza univoca, che lasciano ricostruire in ogni caso l'andamento geometrico del moto: assi elicoidali permanenti esistono allora ed allora soltanto che vengono a coincidere coppie di rette corrispondenti delle due sestuple; di tali assi ve ne ha per conseguenza sei, al massimo, che possono in particolare ridursi ad assi di pura traslazione o di pura rotazione. Con quali forze ciò si raggiunga e come si assicuri la stabilità dell'equilibrio, l'autore investiga, opportunamente generalizzando i garbati spiedienti di Poinsot.

Negli altri lavori, che pur vanno ascritti ai classici indirizzi della meccanica, troviamo anzitutto sotto forma geometricamente espressiva le condizioni, cui debbono soddisfare i vincoli e la sollecitazione dinamica, affinchè un sistema materiale qualsiasi possegga certa tipica combinazione integrabile, che comprende ed estende quelle delle quantità di moto e delle aree. Pel caso particolare di un punto libero, è necessario e basta che la forza appartenga ad un complesso lineare, il che consente ancora al mobile (pur che sia posto in condizioni iniziali convenienti) di descrivere una curva arbitrariamente prescelta. Con questa acuta osservazione rimangono estese allo spazio notissime proprietà del moto centrale.

Ma, anche senza alcuna ipotesi sulla natura della forza, si può utilmente mettere in relazione il moto con un qualsiasi complesso lineare ausiliario, coordinando ad ogni piano osculatore della traiettoria il suo polo rispetto al complesso, e il raggio polare, cioè la retta che congiunge il punto di contatto col polo.

Le due componenti tangenziale e radiale della forza sono suscettibili di espressioni monomie assai semplici e atte in particolare a fornire quei complementi della legge d'attrazione universale, che Halphen e Darboux avevano allora allora conseguiti.

L'analisi algebrica e la termodinamica sono pure rappresentate nelle pubblicazioni di questo triennio. Non mi soffermo per arrivare alla Memoria del 1880 *Sulle vibrazioni dei corpi elasticci isotropi*, che, pur essendo imperfetta, lascia rifulgere la mente geniale dell'autore, per l'idea direttiva e per i procedimenti fecondi che vi si inaugurano.

L'idea direttiva è di trasportare il teorema di Betti e sue conseguenze dal campo statico a quello dei fenomeni variabili col tempo.

Il Cerruti riesce a procacciarsi gli integrali particolari dotati di singolarità caratteristiche nello spazio e nel tempo; e perviene alle formule risolutive. Disgraziatamente una svista di calcolo — un passaggio al limite sotto il segno, compiuto senza le debite precauzioni — gli fa omettere un termine e i suoi congeneri, inquinando tutti i risultati.

Fra questi, la formula (23) (pag. 377), stabilita quasi per incidenza, che avrebbe attribuito — due anni prima di Kirchhoff — espressione matematica al principio di Huyghens. Sarebbe bastato che, prima di far convergere a zero un certo parametro  $\varepsilon$ , fosse stata eseguita una ben ovvia integrazione rispetto al tempo! Il passaggio al limite diviene allora senz'altro legittimo, e dà luogo alla formula esatta oggimai celeberrima sotto il nome di Kirchhoff.

Lo scopo definitivo della Memoria era di arrivare ad esprimere gli elementi salienti del moto vibratorio di un solido elastico (dilatazione cubica, rotazione, spostamenti), mediante le forze di massa e i dati superficiali.

Le espressioni esatte vennero valutate più tardi, per vie diverse (<sup>1</sup>); e molto il Nostro si compiacque quando il Somigliana, avendole recentemente rintracciate con sua immaginosa ed agile calcolazione, rilevò in modo esplicito la virtuale priorità di lui (<sup>2</sup>), sottaciuta innanzi certo per riguardo di menzionare ad un tempo il suo errore. Non insanabile tuttavia, tale anzi da lasciar sostanzialmente sussistere il valore della scoperta!

Ma a render memorabile il lavoro, pur all'infuori delle assicurate se non suggellate conquiste, basta la circostanza che vi sono nettamente tracciati i canoni e i particolari accorgimenti di quel metodo, che condurrà ben presto l'autore ad affrontare con brillanti successi i più importanti problemi della statica elastica.

È questo l'indirizzo di studi che in Italia e fuori comprensivamente si designa coi nomi associati Betti-Cerruti. Vi dedicò il Nostro una serie di memorie, in cui, data forma più semplice ai risultati di Betti e ridotto il numero delle funzioni ausiliarie da assegnarsi preventivamente, se ne fa applicazione sistematica ai suoli isotropi, agli strati, alle sfere, agli involucri sferici (<sup>3</sup>).

(<sup>1</sup>) Cfr. Tedone, *Sulle vibrazioni dei corpi solidi, omogenei ed isotropi*. Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, ser. II, t. XLVII, 1897, pp. 181-258; Love, *The propagation of wave-motion in an isotropic elastic solid medium*. Proceedings of the London Mathematical Society, ser. II, vol. I, 1904, pp. 291-344; Somigliana, *Sopra alcune formule fondamentali della dinamica dei mezzi isotropi*. Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XLI, 1906 (note 1 e 2), pp. 869-885 e 1070-1080; vol. XLII, 1907 (nota 3), pp. 765-779.

(<sup>2</sup>) Cfr. loco cit., nota 2, pag. 1079.

(<sup>3</sup>) Un apprezzamento sintetico su questi lavori, in relazione al progresso e allo

A chi sol consideri il suo acume, e l'ardore perseverante con cui traeva a compimento ogni sua cosa, si affaccia la domanda: come mai le soluzioni degli accennati problemi non si incalzarono a breve distanza, ma andarono lentamente susseguendosi sì da distribuirsi in ben tredici anni?

Può non esservi stata estranea taluna difficoltà di dettaglio, che abbia lungamente resistito ai penetranti suoi sforzi, ma la ragione principale appare senz'altro manifesta dalle vicende della sua vita.

\* \* \*

Invero in quello stesso anno 1880, che segnò forse l'apogeo della sua virtù creatrice, ebbero inizio gli incarichi governativi, che, rapidamente crescendo di numero e di importanza e intrecciandosi con nomine elettive, dovettero inevitabilmente assorbire una gran parte della sua pur grandissima attività.

Fu anzi tutto collaboratore del Cremona (dal luglio al dicembre 1880) nella riorganizzazione della Biblioteca Vittorio Emanuele. In tale ufficio si distinse per modo che, nell'aprile 1883, fu preposto come R. Commissario alla Biblioteca Alessandrina dal ministro Coppino. Questi, che era stato rettore della Università di Torino mentre vi studiava il Cerruti, e fin d'allora aveva preso a benvolerlo, gli affidò inchieste delicate che lo accrebbero nella sua stima e, nel novembre 1886, lo chiamò al Ministero colle funzioni, solitamente attribuite ad un parlamentare, di Segretario Generale.

Il provvedimento, nuovo e non più rinnovato nel dicastero della pubblica istruzione, suscitò commenti e censure al ministro, ed ebbe eco alla Camera, dove il Coppino, nella tornata del 3 dicembre, così si difese:

« Ho cercato chi, non potendo leggere io, leggesse per me; ho cercato « chi, come non è alla scienza, così non fosse straniero alle cose dell'ammi- « nistrazione e fosse capace di fare, con alto scopo del dovere, pari alla cor- « tesi, quello che fu fatto in altri Ministeri, senza che se ne muovesse « rimprovero ai ministri, e senza che si mettesse innanzi non una questione « ma il dubbio di una questione. Altro non ho a dire dell'uomo. Quelli che « lo conoscono, sanno ch'è chiaro e fermo il carattere come è valoroso l'in- « gegno ».

Rimase il Cerruti al Ministero fino al 14 aprile 1887. Nell'anno successivo fu eletto rettore; la fiducia dei colleghi lo volle mantenuto nella carica, ininterrottamente per un quadriennio, e poi, a distanza di tempo, per un triennio ancora. Nel governo dell'Università acquistò grandi benemerenze

---

sviluppo della teoria matematica dell'elasticità, si può trovare nell'eccellente rapporto presentato al Congresso di Parma della Società italiana delle scienze dal prof. Marcolongo, che dell'Estinto fu scolaro, assistente e amico affezionato. (Cfr. *Nuovo Cimento*, ser. V, vol. XIV, 1907, pp. 371-410).

anche dal punto di vista amministrativo, iniziando equa ma energica rivedicazione di crediti trascurati o contesi.

Nel 1896 lo troviamo Presidente di una Commissione d'inchiesta al Collegio Ghisleri di Pavia; nel 1900 R. Commissario alla Scuola Veterinaria di Napoli; nel 1901 Presidente della Società degli Ingegneri e Architetti italiani.

Mandato due volte dalle Facoltà di Scienze al Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione (per i quadrienni 1899-1902, 1905-1908), fu ciascuna volta immediatamente ascritto alla Giunta; dell'uno e dell'altra membro autorevolissimo per la sua grande esperienza di scuole e di regolamenti, per lo studio accurato delle più complesse questioni, che egli riusciva a sbrigare in modo sollecito, sobbarcandosi a lavoro intensivo con senso inusatamente rigido di dovere e sacrificio di ogni suo comodo personale.

Così egli, non alla scienza soltanto, ma ancora agli interessi palpitanti della vita nazionale molto aveva dato, quando con decreto 21 novembre 1901 fu nominato Senatore: giusto compenso ai suoi meriti e affidamento sicuro che ne sarebbero direttamente o indirettamente derivati nuovi e maggiori servigi alla pubblica cosa.

Alla previsione risposero le sapienti sue relazioni al Senato, tra cui quella sulla legge pel Politecnico di Torino (1903); la collaborazione attiva, quale egli intendeva e sapeva prestare, a Commissioni Reali di eccezionale importanza (riscatto delle ferrovie meridionali nel 1905; sistemazione del Tevere nel 1907); la presidenza della Commissione per le privative industriali (1908), cui apparteneva fin dal 1893; e ancora e sopra tutto la direzione della Scuola degli Ingegneri, cui fu chiamato il 1 luglio 1903 come successore di Luigi Cremona.

Pare che questi, morente, abbia espresso l'avviso che Valentino Cerruti sarebbe stato il naturale e degno continuatore dell'opera sua. Palese o tacito, tale fu certo il voto del Cremona, pietosamente raccolto dal Nostro che, favorendo con illuminate previdenze l'accelerato progredire della Scuola, aveva divisato innovazioni grandiose.

Ma troppo egli fidava nell'instancabile fibra. All'eccesso di lavoro, cui si sottopose per la legge sul Politecnico di Torino, si collega un primo deperimento. Una sciagurata influenza dello scorso inverno favorì il divampare di un grave processo morboso. Ben presto un cancro allo stomaco si rivelò ai medici, alla fida consorte, ai pochi famigliari con implacabile crudezza. Egli ebbe presagio, forse non coscienza della morte imminente; certo tollerò il male con imperturbata serenità, e serenamente si spense il 20 agosto p. p.: amaro conforto per chi l'assistè con vigile amore, e spesso l'aveva udito affermare che: « La morte per l'uomo giusto è il più bel giorno della vita! ».

\* \* \*

Onori cospicui, tuttochè impari all'onere, ebbe — noi lo vedemmo — il Cerruti dai pubblici uffici; ebbe altresì onorificenze cavalleresche e distinzioni accademiche. Fu uno dei XL della Società italiana; corrispondente dell'Istituto Lombardo; socio straniero dell'Accademia Leopoldino-Carolina di Halle, ecc. Alla nostra Accademia appartenne fin dal 1883; divenuto nel 1890 socio nazionale, fu eletto segretario per la classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, e coprì questa carica fino al 1906.

Presso i conoscenti e presso il pubblico guadagnò di buon'ora larga estimazione per le qualità intrinseche di intelletto e di carattere, pei solidi e tangibili risultati dell'opera sua.

D'indole molto riflessiva e riservata fu dai più giudicato timido o ruvido; a chi per studi od affetti gli stava vicino apparve però sotto diverso e più vero aspetto.

Quando parlava di scienza, diveniva tosto espansivo, e impressionava spesso l'interlocutore per la profonda e minuziosa conoscenza di dottrine anche estranee alla cerchia abituale dei suoi studi.

A spingere lo sguardo entro la soglia di casa sua ci invita un pensiero dell'eletta signora, che gli fu compagna per oltre un ventennio:

« Accade spesso — sta scritto in una lettera della signora — di rilevare nell'intimità di tutte l'ore piccinerie e difetti di educazione che in pubblico si sanno diligentemente dissimulare. Ma egli, come aveva un contegno corretto dinanzi al mondo, così era sempre nella famigliare con vivenza, e in questa portava in più una gaezza, una serenità che mai non si smentì ».

Ecco il migliore e più espressivo elogio delle virtù domestiche dell'Estinto!

Alla coltura scientifica accoppiava egli estesa erudizione e fine gusto letterario. Dei nostri poeti maggiori prediligeva il Petrarca; e ben sovente ne recava in tasca il Canzoniere, quando, durante le vacanze, intraprendeva per svago lunghe passeggiate in campagna.

Degli autori latini fu conoscitore profondo, e non dei classici soltanto, ma anche dei Padri della Chiesa, che lesse e studiò con fervore di credente. A lui, filosofo naturale ed umanista, felicemente ricorse la nostra Accademia per inviare a Lord Kelvin, in occasione del suo giubileo, un indirizzo non indegno della tradizione lincea.

Le sue benemerenze nel campo bibliografico e storico sono in parte ben note.

Tali ad es. l'organizzazione della biblioteca della Scuola per gli ingegneri, cui egli seppe assicurare larghezza d'indirizzo e di mezzi; e l'inte-

ressamento spiegato per l'edizione nazionale galileiana, massime quando, fungendo da Segretario Generale al Ministero dell'Istruzione, mirabilmente secondava gli sforzi del Favaro, e, nel volgere di pochi giorni, otteneva formale decreto per l'esecuzione del « nobilissimo disegno a benefizio degli studi e ad onore d'Italia » (¹).

Men noto è forse che egli in questi ultimi tempi stava curando (²) una edizione critica delle « Produzioni matematiche » di Giulio Fagnani (opera poderosa di oltre 1000 pagine, in cui si contengono tra altro i noti teoremi sugli archi rettificabili di ellisse e di lemniscata); raccoglieva e intendeva pubblicare il carteggio dei matematici italiani vissuti fra il 1750 e il 1820; e infine, quasi a continuazione di tali ricerche erudite, risolveva, come gli antichi solevano, con diretti artifizi e sottoponeva a revisione critica svariate questioni di massimi e minimi.

Quanta parte convenga pubblicare di ciò che l'immatura fine ha truncato potrà decidersi dopo esame accurato di tutte le sue carte.

Fin d'ora però sento d'interpretare il voto dell'Accademia chiedendo che siano ad essa affidati i manoscritti scientifici di Valentino Cerruti. Qualche sua pagina potrà così ancora fregiare i nostri Rendiconti!

## ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI SCIENTIFICHE

DI

### VALENTINO CERRUTI

1. « Dimostrazione di un teorema del sig. V. N. Bitonti ». Giornale di Matematiche, vol. IX, 1871, pp. 46-48.
2. « Soluzione delle quistioni 1 e 2 proposte dal sig. Bitonti, e di due quistioni proposte nei Nouvelles Annales de Mathématiques ». Ibidem, pp. 104-107.
3. « Soluzione di alcune quistioni proposte nei Nouvelles Annales ». Ibidem, pp. 173-178.
4. « Quistioni proposte a risolvere ». Ibidem, pag. 179, e vol. X, 1872, pag. 372.
5. « Sistemi elastici articolati » (tesi di laurea), pag. 1-57. Torino: Bona, 1873.
6. « Sopra un teorema del sig. Menabrea ». Atti della R. Accademia dei Lincei, ser. 2, vol. II, 1875, pp. 570-581.
7. « Soluzione dei problemi proposti negli esami di licenza per i licei, e gli istituti tecnici del Regno ». Giornale di Matematiche, vol. XIII, 1875, pp. 337-343.
8. « Sul viriale ». Rendiconti della R. Accademia di Napoli ». Ser. I, anno XV, 1876, pp. 154-165.

(¹) Cfr. Favaro « La edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei », Atti e Memorie della R. Accademia di Padova, nuova serie, vol. XXII, 1906, pag. 24.

(²) Assieme a due altri egregi cultori di storia delle matematiche: i professori G. Loria e D. Gambioli.

9. « Quelques propriétés du viriel ». Association française pour l'avancement des Sciences, Comptes rendus du congrès de Clermont-Ferrand (5<sup>ème</sup> session, 1876), pp. 123-124.
10. « Intorno ai movimenti non periodici di un sistema di punti materiali ». Atti della R. Accademia dei Lincei, ser. 2, vol. III, 1876, pp. 244-249.
11. « Intorno alle piccole oscillazioni di un corpo rigido interamente libero ». Memorie della R. Accademia dei Lincei, ser. 3, vol. I, 1877, pp. 345-370.
12. « Considerazioni sui calorif specifici ». Transunti della R. Accademia dei Lincei, ser. 3, vol. I, 1877, pp. 136-141.
13. « De formae cuiusvis quadraticeae in semetipsam transformatione ». Ibidem, vol. II, 1878, pp. 48-49 (breve relazione del Socio Cremona).
14. « Nuovo teorema generale di meccanica ». Ibidem, pp. 75-76.
15. « Sopra una trasformazione delle equazioni del moto di un punto materiale ». Ibidem, vol. III, 1879, pp. 196-197.
16. « Intorno ad una generalizzazione di alcuni teoremi di meccanica ». In « Collectanea mathematica in memoriam D. Chelini » (Milano, Hoepli, 1881), pp. 171-182.
17. « Sulle vibrazioni dei corpi elastici isotropi ». Memorie della R. Accademia dei Lincei, ser. 3, vol. VIII, 1880, pp. 361-389.
18. « Ricerche intorno all'equilibrio dei corpi elastici isotropi ». Ibidem, vol. XIII, 1882, pp. 81-123.
19. « Sulla deformazione di uno strato isotropo indefinito limitato da due piani paralleli ». Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ser. 4, vol. I, 1885, pp. 520-521 (sunto).
20. « Sur la déformation d'une sphère homogène isotrope ». Association française pour l'avancement des Sciences, Comptes rendus du congrès de Grenoble (14<sup>ème</sup> session, 1885); première partie, pag. 890; seconde partie, pp. 68-79.
21. « Sulle equazioni a più variabili che si possono risolvere mediante regoli scorrevoli ». Nota III alla « Teorica e pratica del regolo calcolatore » di Q. Sella (1 ediz. italiana) Torino: Paravia 1886.
22. « Sulla deformazione di una sfera omogenea isotropa ». Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ser. 4, vol. II, 1886 (1. sem.), pp. 461-469 e 586-592.
23. « Sulla deformazione di un corpo elastico isotropo per alcune speciali condizioni ai limiti ». Ibidem, vol. IV 1888 (1 sem.), pp. 785-792.
24. « Proposta di quesito ». Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. II, 1888, pag. 92.
25. « Sulla deformazione di un involucro sferico isotropo per dati spostamenti dei punti delle due superficie limiti ». Ibidem, vol. V (2 sem.) 1889, pp. 189-201.
26. « Sulla deformazione di un involucro sferico isotropo per date forze agenti sulle sue superficie limiti ». Memorie della R. Accademia dei Lincei, ser. 4, vol. VII, 1890, pp. 25-44.
27. « Sulla deformazione di una sfera omogenea isotropa per dati spostamenti dei punti della superficie ». Nuovo Cimento, terza serie, t. XXXII, 1892, pp. 121-133 (traduzione dal francese; vedi n. 20 del presente elenco).
28. « Sulla deformazione di una sfera omogenea isotropa per date forze applicate sulla superficie ». Ibidem, pp. 193-215.
29. « Sulla deformazione di un involucro sferico isotropo per dati spostamenti dei punti delle due superficie limiti ». Ibidem, t. XXXIII, 1893, pp. 5-14 e 49-56.
30. « Sulla deformazione di un involucro sferico isotropo per date forze agenti sulle due superficie limiti ». Ibidem, t. XXXIII, 1893, pp. 97-106; 145-151; 202-208; 259-268.
31. « Sulla deformazione di un corpo elastico isotropo per alcune speciali condizioni ai limiti ». Ibidem, t. XXXIV, 1893, pp. 115-124.

32. « Per una nuova edizione dei lavori scientifici di Enrico Betti ». Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. VIII, 1893, pag. 191.
33. « Elenco dei lavori scientifici di Enrico Betti ». T. VIII, 1894, pp. 161-165.
34. « Sopra una proprietà degli integrali di un problema di meccanica che sono lineari rispetto alle componenti della velocità ». Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ser. 5, vol. IV, 1895, pp. 283-287.
35. « Commemorazione del defunto Presidente Eugenio Beltrami ». Ibidem, vol. IX, 1901 (1 sem.), pp. 139-142.
36. « Prefazione alle opere Matematiche di Enrico Betti, pubblicate per cura della R. Accademia dei Lincei ». Tomo primo (Milano: Hoepli, 1903), pp. III-IV.
37. « Commemorazione di Ernesto Cesàro ». Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ser. 5, vol. XVI, 1907 (1 sem.), pp. 76-82; riprodotta in Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXIII, 1907, pp. 221-226.
38. « Le matematiche pure e miste nei primi dodici Congressi della Società italiana per il progresso delle Scienze ». (Discorso inaugurale della sezione I). Atti della Società per il progresso delle Scienze. Prima riunione (Parma 1907), pp. 94-107. Ristampata in Annali di Matematica, ser. III, t. XV, 1908, pp. 1-20.

#### PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci DALLA VEDOVA, SCHIAPARELLI G., GIGLIOLI, RAMON Y CAJAL, ROSENBUSCH. Fa inoltre speciale menzione di una relazione del comandante DE GERLACHE sulla crociera oceanografica compiuta dalla « Belgica » nel mare della Groenlandia nel 1905, sotto gli auspici e a spese del Duca d'ORLEANS; della *Corrispondenza di Carlo Linneo* con vari membri dell'Università di Upsala; di una pubblicazione fatta in occasione delle feste di Darwin e di Wallace alla Società Linneo di Londra; e infine di sette volumi del periodico *L'Universo*, pubblicati dal dott. F. S. ARCHENHOLD, e inviati dallo stesso in dono all'Accademia.

Il Corrispondente G. CASTELNUOVO presenta i due ultimi volumi (II e III) degli *Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici*. Egli sperava che la pubblicazione potesse compiersi in un periodo più breve; ora confida che la mole e l'importanza dell'opera valgano a scusare il ritardo, che egli con tutta la miglior volontà non è riuscito ad evitare.

Uno dei due volumi riguarda la Matematica pura, l'altro le applicazioni e le questioni d'indole critica. Questa ultima parte riuscirà interessante anche perchè mette in luce due aspirazioni comuni ai cultori odierni della Matematica. La prima si propone di render sempre più stretti i legami fra la scienza pura e le applicazioni; si leggeranno con piacere, in proposito, gli articoli di varî eminenti cultori della scienza attuariale e della ingegneria. La seconda aspirazione riguarda l'insegnamento della matematica. È ormai universalmente sentito il desiderio di rendere accessibili ad un largo pubblico le idee e le conquiste fondamentali della matematica moderna, alleg-

gerendo il bagaglio ingombrante, che un esagerato rispetto della tradizione ha introdotto nei programmi scolastici. La Commissione internazionale per l' insegnamento matematico, che è sorta appunto in seguito ad un voto del nostro Congresso, troverà nell'ultimo volume degli *Atti* documenti preziosi relativi alle moderne tendenze della pedagogia matematica nelle principali Nazioni.

Nel loro insieme gli *Atti* dimostrano ancora una volta l'importanza del passato Congresso. Di ciò avrà ragione di compiacersi questa illustre Accademia che al Congresso volle concedere il suo alto appoggio.

### CORRISPONDENZA

Nella seduta del 7 novembre u. s. il PRESIDENTE lesse all'Accademia la corrispondenza tenuta colla Società Reale di Londra a proposito del premio internazionale « Joule ». Dalla sottoscrizione internazionale per onorare il grande fisico JOULE, fin dal 1899 fu serbato un fondo, trasmesso al Consiglio e ai Membri della S. R. col proposito di creare una *borsa di studio Joule*, di carattere internazionale, da essere destinata ad uno studioso che volesse occuparsi di ricerche di fisica possibilmente più immediatamente legate all'opera di Joule. Per il prossimo biennio la nostra Accademia ha l'onore di eleggere lo studioso ed il tema, la S. R. di Londra avendone fatta l'offerta, per mezzo del suo Segretario GUGLIELMO CROOKES, alla nostra Accademia, la Presidenza della quale accettò ringraziando. In quella seduta la Classe deliberò di incaricare il Presidente di prendere accordi coi Colleghi della Sezione di Fisica e di riferire nella seduta prossima.

Il Presidente BLASERNA informa la Classe che, interpellati i Colleghi NACCARI, PACINOTTI, RIGHI, RÖITI e VOLTERRA, essi con voto conforme, accettarono la sua proposta che il prof. dott. ALESSANDRO AMERIO fosse lo studioso da designare alla S. R. di Londra, il quale continuerebbe nel biennio 1910-11 gli studi, già da lui felicemente incoati, *sullo spettro e sulla temperatura della fotosfera solare* nei due Osservatori « Angelo Mosso » sul colle d'Olen (m. 3000) e « Regina Margherita » sul monte Rosa (m. 4600).

L'Accademia unanimemente approva la proposta del suo Presidente appoggiata dai Membri della Commissione sopradetta.

Il Segretario MILLOSEVICH dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

L'Accademia delle scienze di Lisbona; la R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; la Società Reale di Vittoria; la Società geologica di Sydney; la R. Accademia delle scienze di Stockholm; il Museo Coloniale di Wellington; la Biblioteca Bodleiana di Oxford; gli Osservatori di Cambridge Mass., e di Praga.

E. M.